Subject
Date

«سیستم های کنترل خطی»

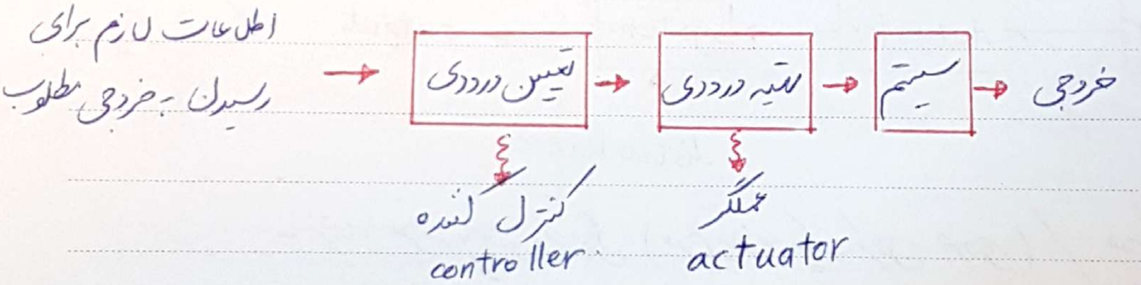
babazadeh@sharif.ir
716 اتاق / 4362

توزیع نمره:

- میانترم 30% دوشنبه ۱۳ آذر، ۹ صبح
- پایانترم 40%
- آزمایشگاه 10% — کلاس تمرین: یکشنبه، 12:30 - 13:30
- کوئیز 10% (سر کلاس تمرین، با اطلاع قبلی)
- تمرین 10%

مفهوم و ضرورت کنترل:

- سیستم کنترل: سیستمی که به منظور رسیدن به یک «خروجی مطلوب» تعبیه شده است. تعیین و تهیه ورودی لازم برای رسیدن به خروجی مطلوب، کار سیستم کنترل است.



* در این درس، سیستم های خطی، تغییر ناپذیر با زمان، پیوسته زمان و تک ورودی-تک خروجی در حوزه فرکانس مدنظر قرار می گیرد.

- اهداف کنترل:

۱. stability (پایداری)

۲. command following (ردیابی فرمان) (tracking): تغییر یا ردگیری پاسخ مطلوب با سرعت و دقت مناسب

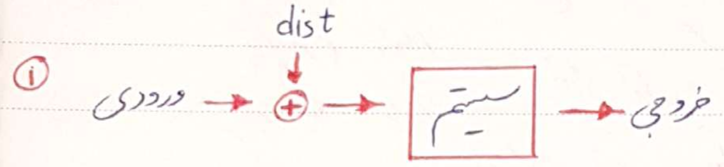
۳. Disturbance Rejection: کاهش یا حذف کامل اثر «اغتشاش» روی پاسخ سیستم

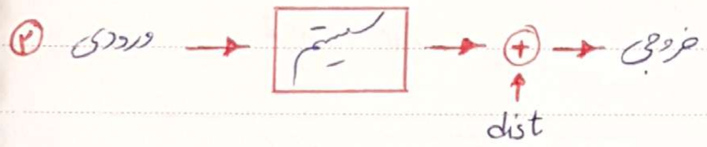
PAPCO

Subject
Date

- اغتشاش: عامل یا سیگنال یا عنصر ناخواسته‌ای است که به سیستم تحت کنترل وارد شده و خروجی آن را تغییر می‌دهد.

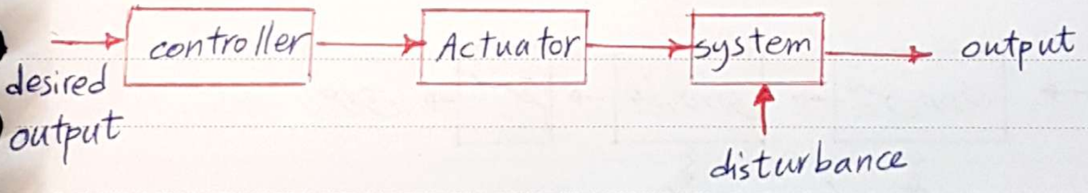
✓ مدلسازی اغتشاش:





- انواع مکانیزم های کنترلی:

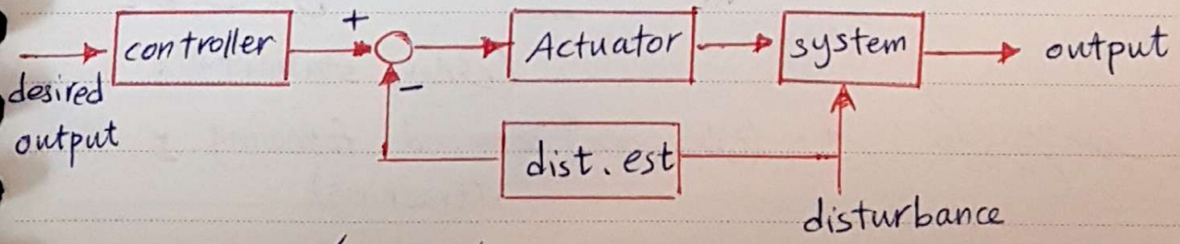
1. کنترل حلقه باز Open-Loop:



- مزایا: هزینه پایین و سادگی (عدم نیاز به چک کردن خروجی) / عدم نگرانی ناپایدار شدن سیستم (اگر از قبل پایدار بوده)

- معایب: عدم توانایی تصمیم گیری با توجه به اغتشاش و تغییرات غیرمنتظره‌ی سیستم

2. کنترل Feed forward:

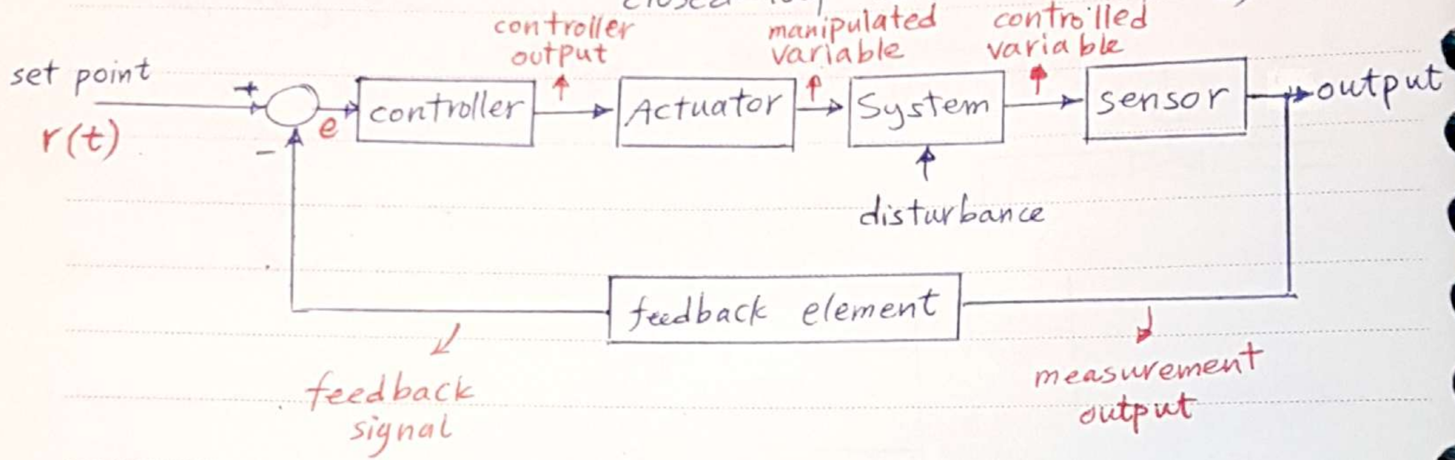


این روش به صورت تخمین اغتشاش و حذف آن در سیستم کنترل عمل می‌کند ولی کارایی آن محدود است.

Scanned by CamScanner

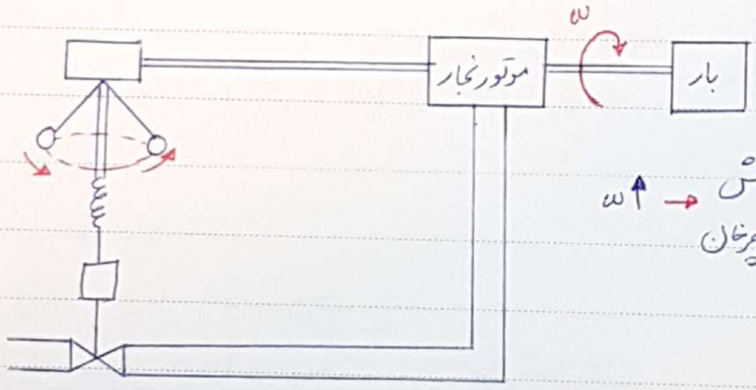
Subject
Date

۳- کنترل حلقه بسته closed-loop control

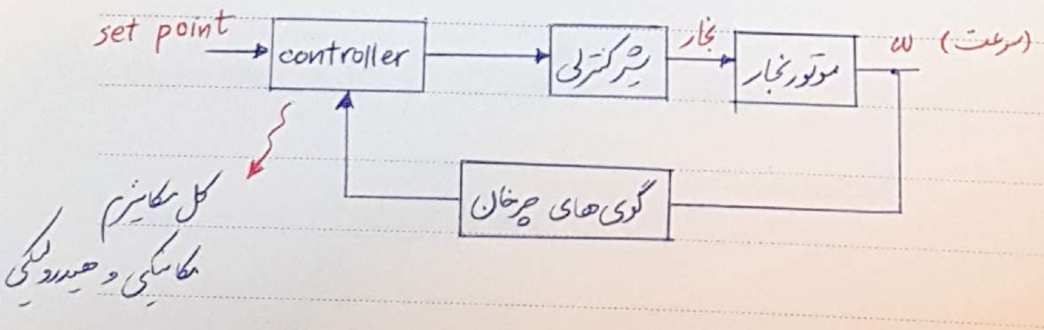


□ چند مثال از سیستم‌های کنترلی

- مثال: کنترل سرعت موتور بخار توسط گلوله‌های چرخان (James Watt - 1769)



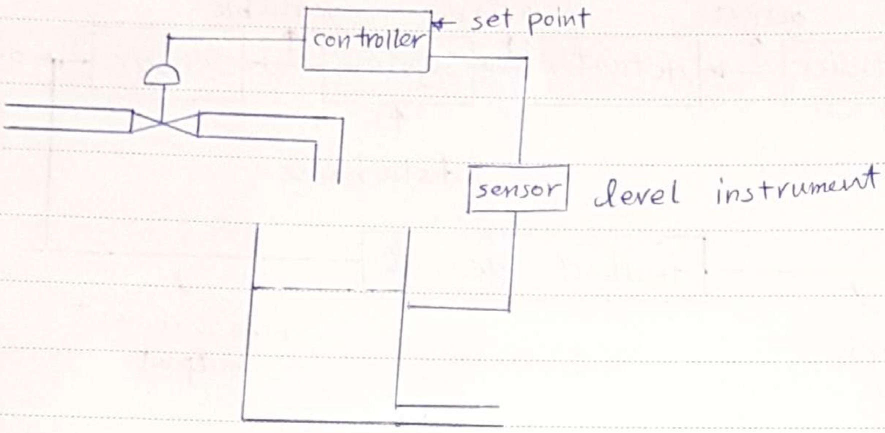
ω↑ → سرعت چرخش گلوله‌ی چرخان → بالا رفتن ساقه‌ی شیر → کم شدن شدت بخار → ω↓

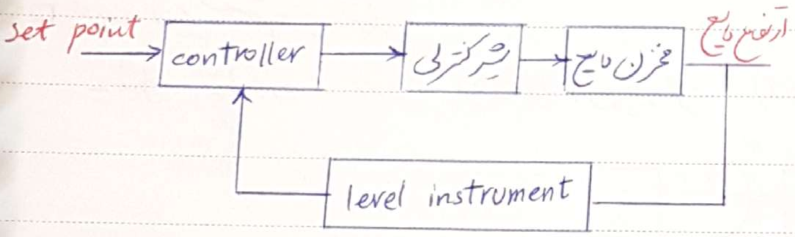


PAPCO

Subject
Date

- مثال: کنترل سطح مایعات





Scanned by CamScanner

Subject
Date

مدل های ریاضی سیستم ها

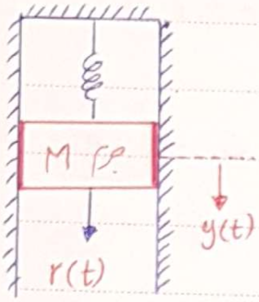
- مدل های ریاضی برای توصیف کمّی رفتار سیستم ها ابزار مناسبی هستند.

روش های مدلسازی:

۱- استخراج مدل ریاضی براساس قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم (1st principle)

۲- شناسایی سیستم (System Identification) براساس داده های ورودی - خروجی

- مثال: سیستم جرم و فنر



$$M\ddot{y} = r(t) - F_{sp} - F_f$$

(F_{sp}: نیروی فنر ، F_f: نیروی اصطکاک)

نیروی فنر و نیروی اصطکاک هر دو غیر خطی است. ولی برای یک فنر خوب و اصطکاک معقول، می توان آن ها را به صورت خطی تقریب زد:

$$F_{sp} \simeq ky \quad , \quad F_f \simeq b\dot{y}$$

$$\Rightarrow M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = r(t)$$

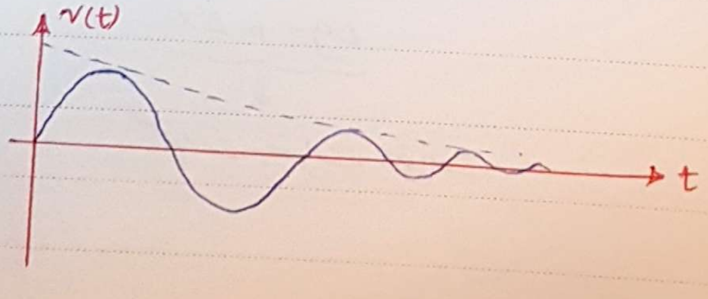
- مثال: سیستم معادل الکتریکی:

$$r(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)\,d\tau$$

معمولاً می توان بین کمیت های الکتریکی و مکانیکی تناظر برقرار کرد. مثلاً اگر در مثال قبل قرار دهیم $v(t) = \dot{y}(t)$ داریم:

$$r(t) = M\frac{dv(t)}{dt} + b\,v(t) + k\int_0^t v(\tau)\,d\tau$$

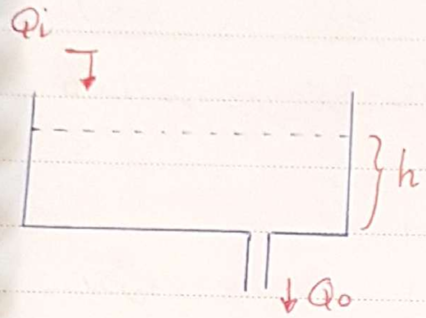
$$v(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$$



Scanned by CamScanner

Subject
Date

- مثال:



Q_i: فلو ورودی

Q_o: فلو خروجی

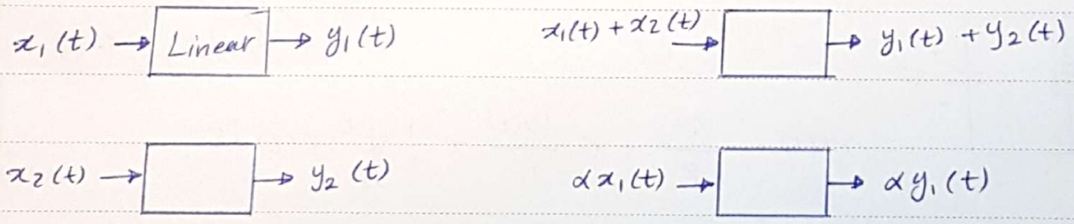
A: سطح مقطع مخزن

$$V = Ah \rightarrow \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow Q_i - Q_o = A\frac{dh}{dt} \quad , \quad \text{برنولی} \quad Q_o = k\sqrt{h}$$

$\Rightarrow$ معادله نهایی: $\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{A}\sqrt{h} + \frac{1}{A}Q_i \rightarrow$ معادله غیرخطی

تعریف سیستم خطی: سیستمی را خطی گوییم که دو اصل جمع آثار (superposition) و همگنی (homogeniety) را برآورده سازد.



- مثال:

$y = mx$ linear

$y = mx + b$ non-linear ⇝ چرا این سیستم‌ها می‌توان از ابزارهای خطی کمک گرفت؟

$y = x^2$ non-linear

$\dot{y} + \alpha y = x$ linear

$y = y_0 + \Delta y \; , \; x = x_0 + \Delta x$

$y_0 + \Delta y = m(x_0 + \Delta x) + b$

$\Delta y = m\Delta x$

↓

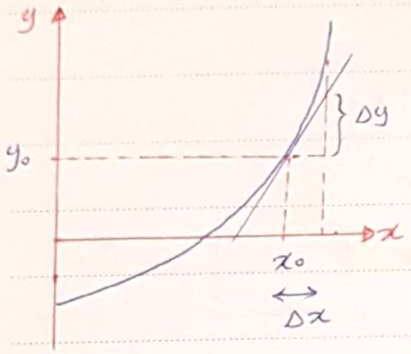
سیستم نسبت به تغییرات خطی است.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

خطی سازی (Linearization):



فرض کنید $(x_0, y_0 = f(x_0))$ یک نقطه کار باشد.
با استفاده از بسط تیلور حول نقطه کار خواهیم داشت:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + \cdots$$

فرض کنید $f'(x) \neq 0$. در این صورت رفتار $y = f(x)$ حول نقطه x_0 مشابه رفتار $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ حول نقطه صفر است.
به عبارتی

$$\Delta y \simeq f'(x_0)\Delta x$$

در حالتی که x و y برداری باشند:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x = x_0}(x_1 - x_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{x = x_0}(x_n - x_{n0})$$

$$+ \ H.O.T$$

(جملات مرتبه بالاتر)

مشابها فرض می‌کنیم $J = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x = x_0}$ غیرمنفرد (non-singular) باشد. در این صورت
رفتار $y = f(x)$ حول x_0 مشابه رفتار Δx
$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x = x_0}$ حول نقطه صفر خواهد بود.

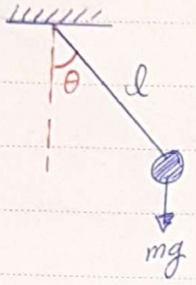
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

مثال (خطی سازی) آونگ بدون جرم



$$I\ddot{\theta} = T$$

$$I = ml^2 \Rightarrow T = -mgl\sin(\pi-\theta)$$

$$= -mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

خطی سازی:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left[\sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta-\theta_0)\right] = 0$$

با خطی سازی حول $\theta_0 = 0$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

- برای شرط اولیه‌های کمتر از 30°، اختلاف جواب معادله غیرخطی و معادله خطی کمتر از ۵٪ است.

Scanned by CamScanner

تبدیل لاپلاس

پاسخ معادله دیفرانسیل خطی:

- مولفه‌های نمایی: e^{st} ، $\frac{de^{st}}{dt} = se^{st}$
- مولفه‌های سینوسی: $e^{j\omega t}$ ، $\frac{d^2(e^{j\omega t})}{dt^2} = -\omega^2 e^{j\omega t}$

□ تبدیل فوریه : $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$

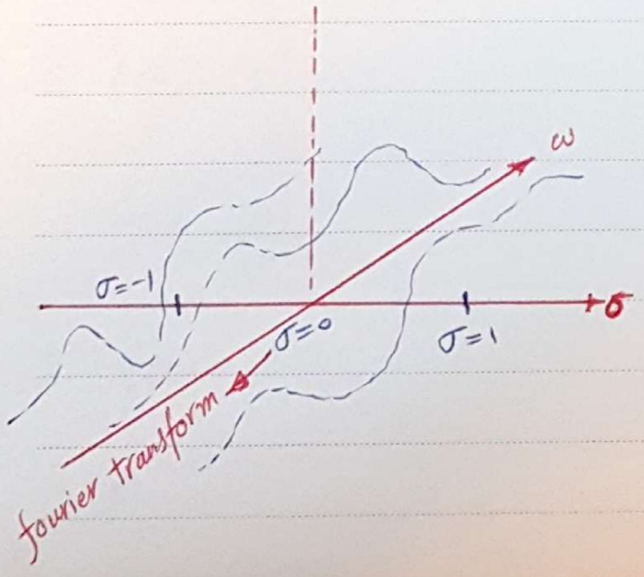
□ تبدیل لاپلاس : $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

$\Rightarrow F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\sigma t}\,e^{-j\omega t}\,dt = F\{f(t)e^{-\sigma t}\}$

تبدیل لاپلاس:

- $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ Bilateral دوطرفه
- $F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ Unilateral یک طرفه ✓

■ در کنترل، حد پایین را صفر می‌گیریم. (تا بتوانیم سیستم‌های علّی و دارای شرط اولیه را بررسی کنیم)



تبدیل لاپلاس، تبدیل فوریه های متعددی است که از تابع $f(t)e^{-\sigma t}$ می‌گیریم:

Subject
Date

□ شرط لازم و کافی برای وجود تبدیل لاپلاس، مطلقاً انتگرال پذیری $f(t)e^{-\sigma t}$ است:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt < \infty$$

ناحیه همگرایی (Region of Convergence) : مجموعه s های که انتگرال پذیری را برآورده کنند.

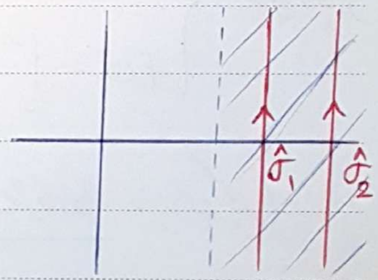
-ROC-

- خاصیت مهم ROC :

□ اگر انتگرال تبدیل لاپلاس برای $s_1=\sigma_1+j\omega_1$ همگرا باشد، آن گاه برای هر s دیگر که سمت راست s_1 باشد $(\sigma > \sigma_1)$ همگراست، و اصولاً همگرایی به ω بستگی ندارد.

□ عکس تبدیل لاپلاس را می‌توان از انتگرال زیر به دست آورد:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\hat\sigma - j\infty}^{\hat\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$



$\hat\sigma$ اختیاری است، و فقط کافی است داخل ناحیه همگرایی باشد.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

□ تبدیل لاپلاس چند سیگنال مهم :

۱ $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$ ROC: $\{\sigma > 0\}$

۲ $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

$F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ ROC: $\{\sigma > -\alpha\}$

۳ $f(t) = \sin \omega t \; u(t)$

$F(s) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ROC: $\{\sigma > 0\}$

۴ $f(t) = \cos \omega t \; u(t)$

$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ ROC: $\{\sigma > 0\}$

۵ $f(t) = t^n u(t)$

$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ROC: $\{\sigma > 0\}$

۶ $f(t) = \delta(t)$

$F(s) = 1$ ROC: $\{\sigma \in \mathbb{R}\}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

— مرور خواص تبدیل لاپلاس :

۱ $\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = a F(s) + b G(s)$

$ROC\,1 \cap ROC\,2 \subseteq ROC$

۲ $\mathcal{L}\{f(t-d)\} = e^{-sd} F(s)$, $ROC = R$

۳ $\mathcal{L}\{e^{s_0 t} f(t)\} = F(s-s_0)$ $ROC = R + Re\{s_0\}$

۴ $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$ $ROC = aR$

۵ $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$ $ROC\,1 \cap ROC\,2 \subseteq ROC$

۶ $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$ $R \subseteq ROC$

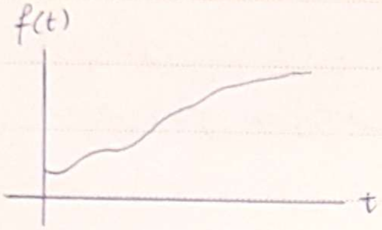
به نحوی مشابه برای مشتق n ام داریم:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

۷ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$ $ROC \subseteq R$

PAPCO

Scanned by CamScanner



• قضیه مقدار اولیه Initial Value Theorem

اگر $f(t)$ شامل ضربه یا مشتقات آن در $t=0$ نباشد،

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

• قضیه مقدار نهایی Final Value Theorem

اگر $\lim_{t\to\infty} f(t)$ موجود باشد،

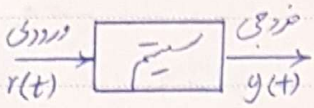
$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$\lim_{s\to 0} sF(s)$ ممکن است موجود باشد، درحالی که $f(\infty)$ موجود نباشد. بنابراین باید جداگانه از وجود $f(\infty)$ اطلاع داشته باشیم.

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject
Date

تابع انتقال Transfer Function



تابع انتقال سیستم LTI بنا به تعریف، برابر نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی است، زمانی که همه شرایط اولیه صفر فرض می‌شوند.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

معمولاً تابع انتقال، نسبت دو چند جمله‌ای از s است:

$$H(s) = \frac{P(s)}{q(s)}$$

(تاخیردار سیستم ها)

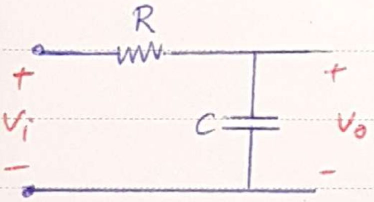
+ $q(s)$: چند جمله‌ای مشخصه

+ $q(s) = 0$: معادله مشخصه

* به ریشه‌های $q(s) = 0$ قطب‌های سیستم و به ریشه‌های $P(s) = 0$، صفرهای سیستم می‌گوییم.

* درجه چند جمله‌ای $q(s)$ را درجه سیستم می‌گوییم. (system's order)

مثال



$$V_i = V_o + Ri \ , \quad i = C\frac{dV_o}{dt}$$

$$V_i(s) = V_o(s) + RCs\,V_o(s)$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+RCs} = H(s)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تابع انتقال سیستم درجه n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

$$\Rightarrow (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)$$

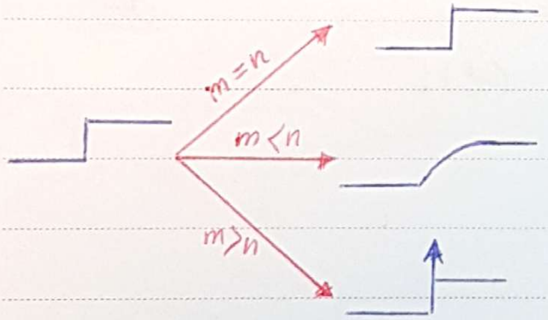
$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- سیستم از مرتبه n است و n قطب دارد.

• اگر $m \leq n$ باشد ← سیستم proper (سره)

• اگر $m < n$ باشد ← سیستم strictly proper (اکیداً سره)

• اگر $m > n$ باشد ← سیستم non-proper (ناسره)



هرچقدر m کوچکتر از n باشد، یعنی سیستم بیشتر اثرات و تغییرات ناگهانی را با فرایند طولانی تری منتقل می کند.

پاسخ سیستم به ورودی r(t) و شرایط اولیه:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{q(s)}$$

$$r(t) \rightarrow R(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$Y_1(s) = H(s)R(s) = \frac{P(s)\,n(s)}{q(s)\,d(s)}$$ پاسخ به ورودی

$$Y_2(s) = \frac{b(s)}{q(s)}$$ پاسخ به شرایط اولیه

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{P(s)}{q(s)} \cdot \frac{n(s)}{d(s)} + \frac{b(s)}{q(s)}$$

فرم معادل →
$$Y(s) = \frac{P_1(s)}{d(s)} + \frac{P_2(s)}{q(s)} + \frac{b(s)}{q(s)}$$

▫ اگر فرض کنیم همه قطب های سیستم در نیم صفحه چپ صفحه مختلط باشند، تبدیل لاپلاس معکوس قسمت $b(s)/q(s)$ و $P_2(s)/q(s)$ برای $t \to \infty$ به سمت صفر می رود.
در این صورت، این قسمت از پاسخ را پاسخ گذرا (Transient Response) می گوییم.

▫ اما پاسخ $\frac{P_1(s)}{d(s)}$ معمولاً برای $t \to \infty$ حذف نمی شوند و در رفتار سیستم می ماند. این پاسخ را پاسخ ماندگار (steady state response) می گوییم.

مثال

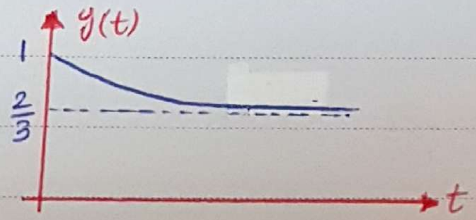
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 2r \qquad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0$$
$$r(t) = u(t) \quad (\text{پله})$$

$$s^2 Y(s) - s + 4sY(s) - 4 + 3Y(s) = 2R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^2+4s+3} R(s) + \frac{s+4}{s^2+4s+3}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2/3}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1/3}{s+3} + \frac{3/2}{s+1} + \frac{-1/2}{s+3}$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{2}{3}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

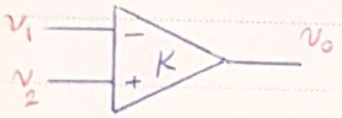


PAPCO

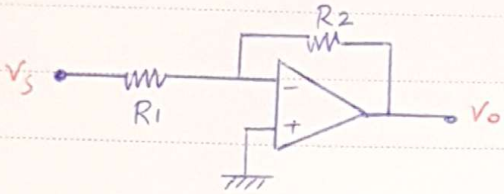
Scanned by CamScanner

Subject
Date

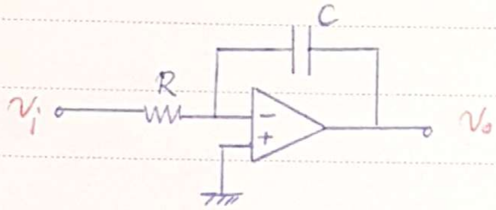
مثال تابع انتقال چند مدار op - amp :



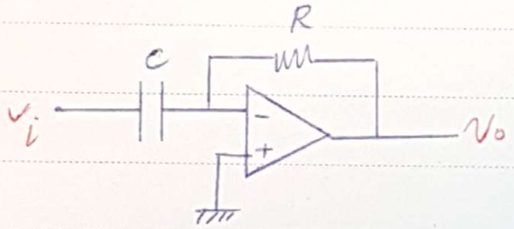
$$v_o = -K\,(v_1 - v_2)$$



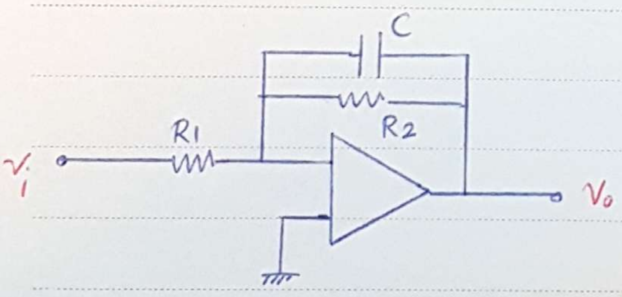
$$v_o = -\frac{R_2}{R_1}\,v_i$$ تقویت کننده وارون ساز



$$V_o = \frac{-1}{RCs}\,V_i$$ انتگرال گیر



$$V_o = -RCs\;V_i$$ مشتق گیر



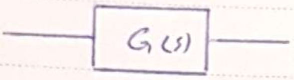
$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2Cs+1}$$

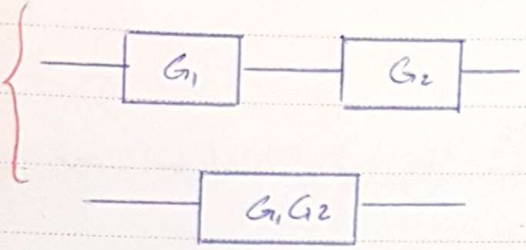
* علت استفاده از سیستم های مبتنی بر اپ امپ در ساختن سیستم های مرکب، عدم وجود اثر بارگذاری است.

PAPCO
Scanned by CamScanner

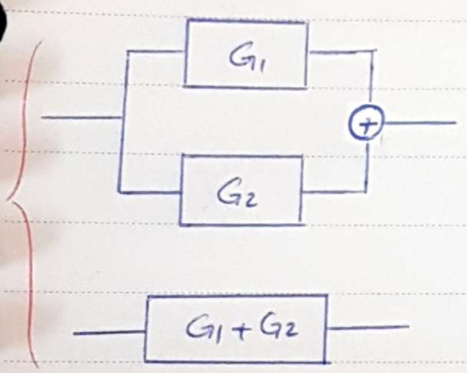
Subject
Date

- نمایش دیاگرام های بلوکی - Block Diagram Representation

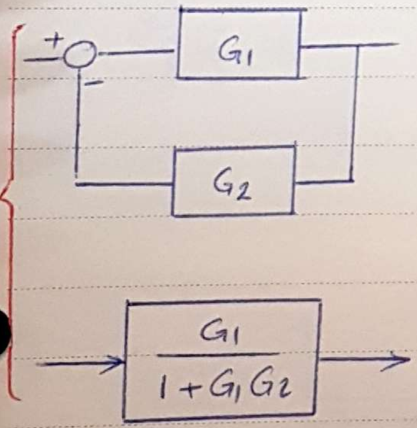




$G = G_1 G_2$ اتصال سری



$G = G_1 + G_2$ اتصال موازی

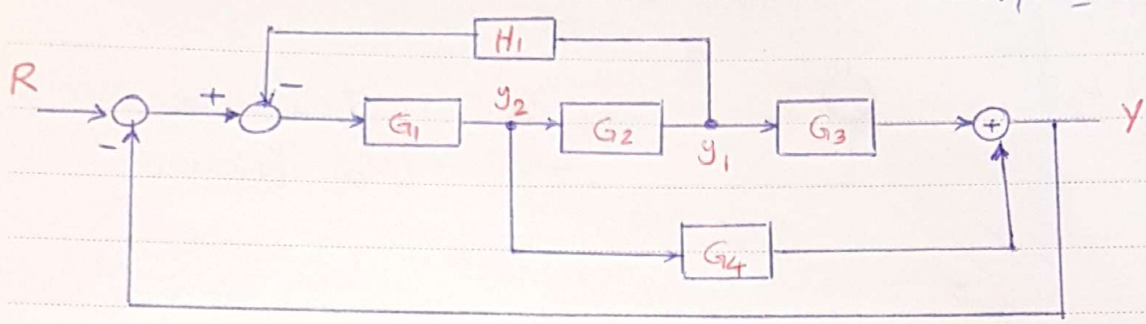


$G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$ اتصال فیدبک

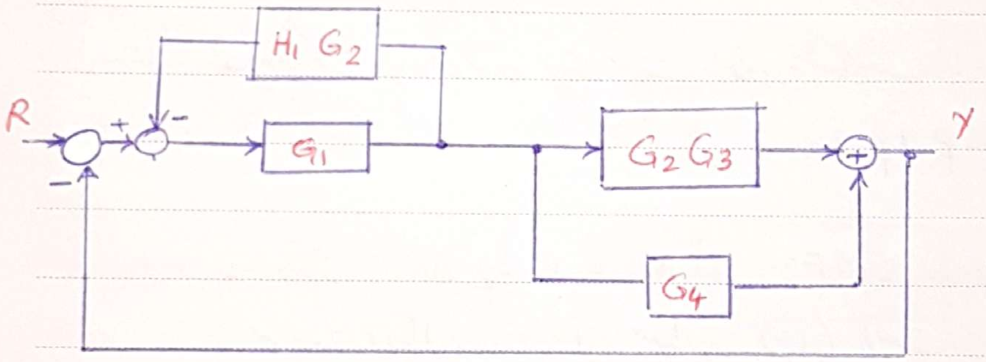
Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ساده سازی دیاگرام بلوکی



به گونه‌ای که بتوانیم از روابط سیستم های شناخته شده (سری، موازی و فیدبک) استفاده کنیم، سیستم را به صورت زیر ساده می کنیم:

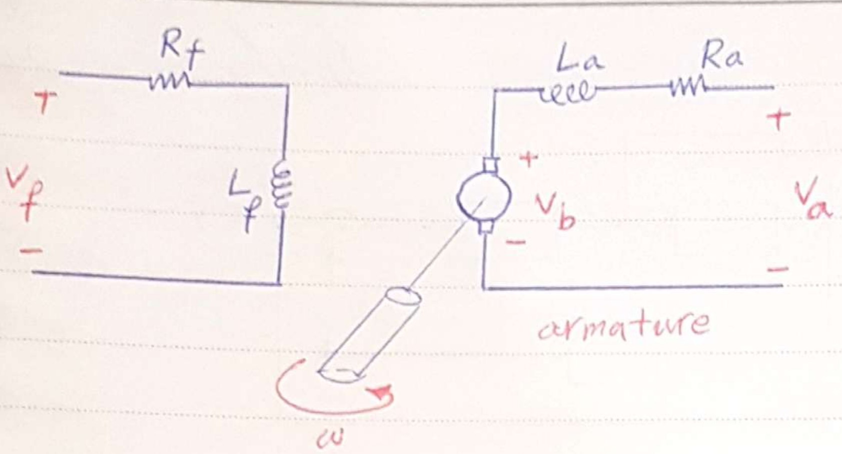


$$\frac{Y}{R} = \frac{(G_4 + G_2 G_3) \times \dfrac{G_1}{1 + G_1 H_1 G_2}}{1 + \dfrac{(G_4 + G_2 G_3)\, G_1}{1 + G_1 H_1 G_2}} = \frac{G_1 G_4 + G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 H_1 G_2 + G_1 G_4 + G_3 G_2 G_1}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date



شکل کنترل دور موتور DC

J: Interia
b: friction

* شار مغناطیسی تولید شده در فاصله هوایی:

$\phi = K_f \, i_f$

i_f: field current

* میزان گشتاور تولید شده روی شفت موتور، متناسب با:

$T_m = K_1 \phi \, i_a = K_1 K_f \, i_f \, i_a$

* ولتاژ $v_b = K \, i_f \, \omega$ را Back EMF می‌گوییم که متناسب با سرعت دوران و جریان میدان (i_f) است.

* دو ورودی V_a و V_f را داریم، ولی اگر هر دو جریان i_a و i_f متغیر باشند، سیستم معادلات غیرخطی پیدا خواهد کرد. لذا مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

① جریان آرمیچر ثابت (Field Control DC Motor) (i_a = constant)

$T_m = K_m \, i_f \quad (K_m = K_1 K_f \, i_a)$

$V_f = R_f \, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \Rightarrow V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s)$

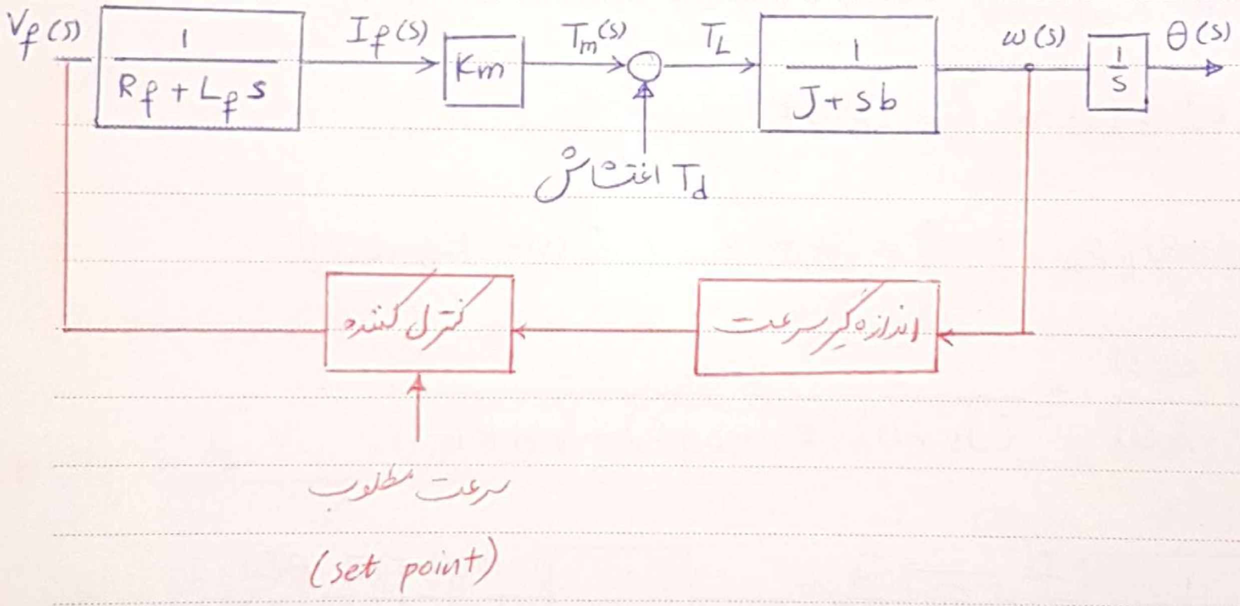
$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T_m = K_m \, i_f \Rightarrow (Js^2 + bs)\,\Theta(s) = K_m I_f(s) = \dfrac{K_m V_f(s)}{R_f + L_f s}$

Subject
Date

$$H(s) = \frac{\omega(s)}{V_f(s)} = \frac{s\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{\underbrace{(R_f + L_f s)}_{\text{Electrical Mode}}\underbrace{(Js + b)}_{\text{Mechanical Mode}}}$$

عموماً این مد چنان غالب است که می‌توان از مد الکتریکی در مقابل آن صرف نظر کرد.

■ نمایش دیاگرام بلوکی:



* برای آن که این سیستم کار کند، باید یک مکانیزم جانبی برای ثابت نگه داشتن جریان آرمیچر تعبیه کرد، چرا که مقدار آن (طبق KVL و KCL) متناسب با V_b (و متناسب با ω) تغییر می‌کند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

(Armature-Controlled DC Motor) (i_f = constant) ② کنترل توسط جریان آرمیچر

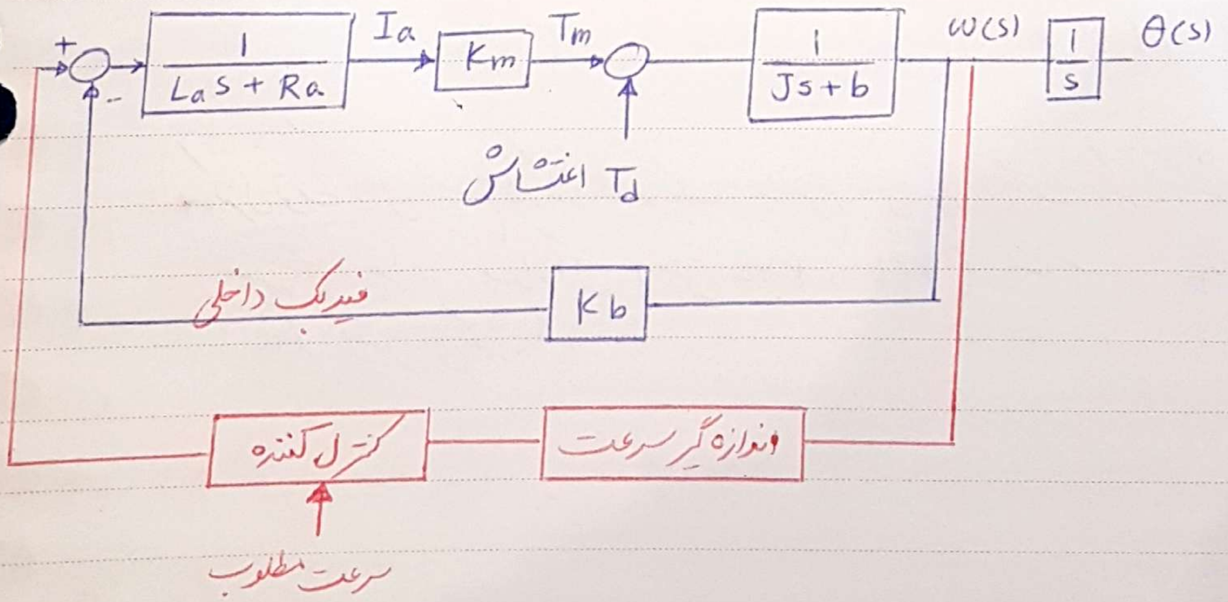
$$\left.\begin{aligned} T_m &= K_m i_a \\ V_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_b \omega \\ J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} &= K_m i_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$(R_a + L_a s)\, I_a(s) = V_a(s) - K_b\, \omega(s)$$

$$(Js + b)\, \omega(s) = K_m I_a(s)$$

$$\Rightarrow (Js+b)(R_a + L_a s)\, \omega(s) = K_m \left(V_a(s) - K_b\, \omega(s) \right)$$

$$H(s) = \frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(Js+b)(R_a + L_a s) + K_m K_b}$$



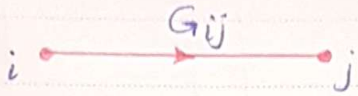
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

■ نمودارهای گذر سیگنال Signal Flow Graph

نقاط مختلف نمودار توسط گره‌ها نمایش داده می‌شود که توسط شاخه‌هایی با جریان معلوم به هم متصل شده‌اند.



* مسیر (path): یک شاخه یا مجموعه‌ای از شاخه‌هاست که دو گره را به هم متصل می‌کنند.

* حلقه (loop): یک مسیر بسته است که از یک گره شروع شده و به همان گره ختم می‌شود، بدون آن که از هیچ گره‌ای بیش از یک بار بگذرد.

* دو حلقه را بی تماس می‌گوییم، اگر هیچ گره مشترکی نداشته باشند.

◄ روش Mason: رابطه بین گره i (مستقل) و گره j (وابسته) برابر است با:

■ $$T_{ij} = \frac{\sum_k P_{ijk} \Delta_{ijk}}{\Delta}$$

■ P_{ijk}: مسیر پیشرو k ام از گره i تا گره j

■ Δ: دترمینان گره

$$\Delta = 1 - \sum L_n + \sum L_m L_n - \sum L_m L_n L_p + \cdots$$

($\sum L_n$: حاصل جمع حلقه‌ها — $\sum L_m L_n$: حاصل جمع دو به دو حلقه‌های بی تماس)

■ Δ_{ijk}: دترمینان گراف، زمانی که همه حلقه‌هایی که با مسیر k ام در تماس هستند حذف شوند.

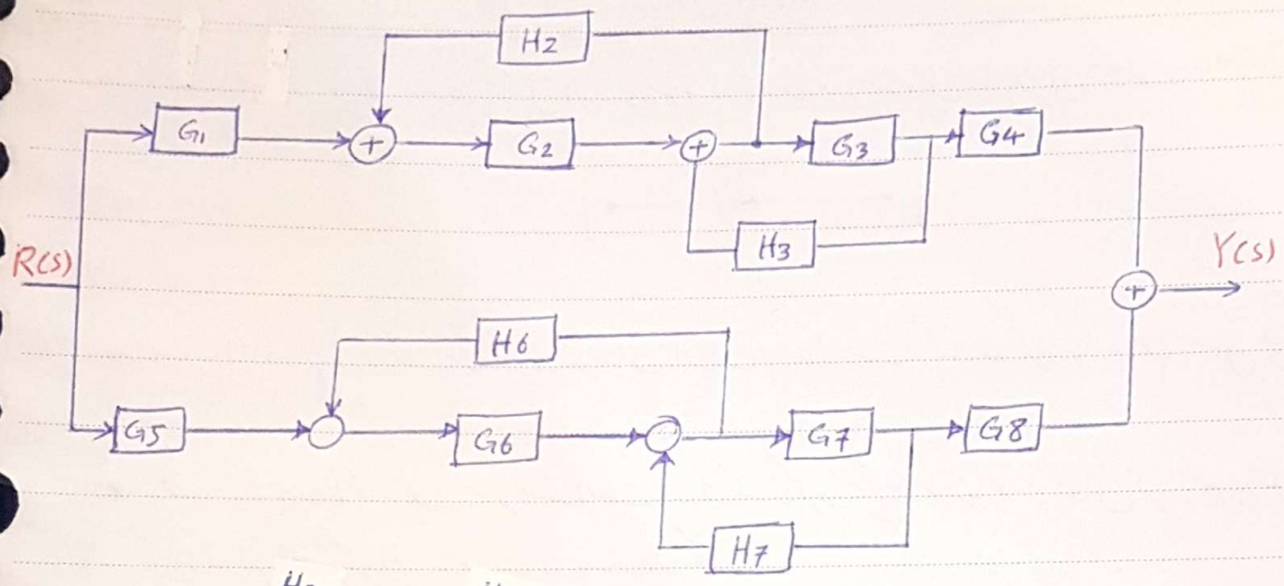
Δ_{ijk} → cofactor مسیر k ام

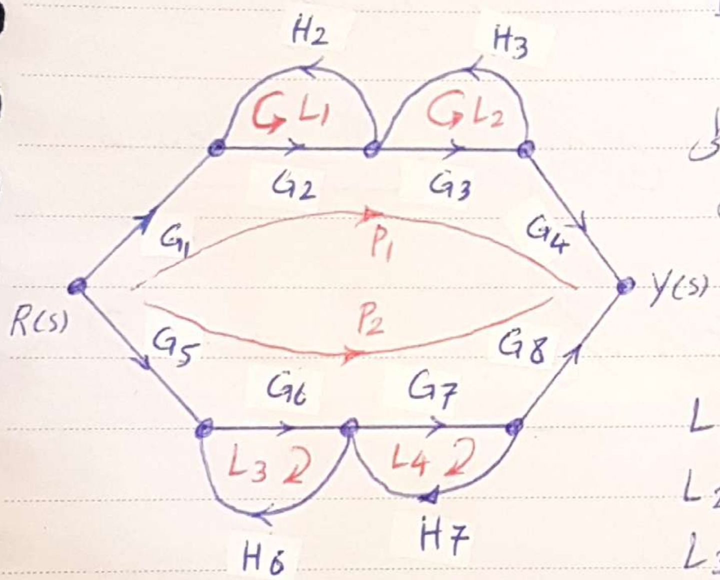
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال





*نکته: مسیر "پیشرو"، مسیری است که در طی آن، به عقب برنگردیم و دوبار از روی یک گره رد نشویم.

$L_1 = H_2 G_2$

$L_2 = H_3 G_3$

$L_3 = H_6 G_6$

$L_4 = H_7 G_7$

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$

Δ_{P1} متناظر با مسیر $= 1 - (L_3 + L_4)$

Δ_{P2} متناظر با مسیر $= 1 - (L_1 + L_2)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$

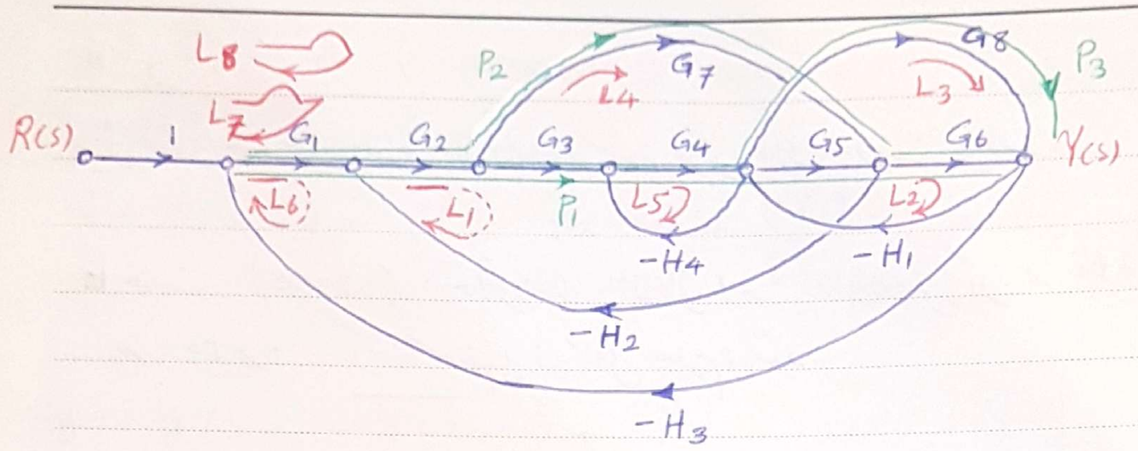
$$= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 (1 - L_3 - L_4) + G_3 G_6 G_7 G_8 (1 - L_1 - L_2)}{\Delta}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال



$L_1 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$

$L_2 = -G_5 G_6 H_1$

$L_3 = -G_8 H_1$

$L_4 = -G_7 H_2 G_2$

$L_5 = -G_4 H_4$

$L_6 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$

$L_7 = -G_1 G_2 G_7 G_6 H_3$

$L_8 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_8 H_3$

$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 \rightarrow \Delta_1 = 1$

$P_2 = G_1 G_2 G_7 G_6 \rightarrow \Delta_2 = 1 + G_4 H_4$

$P_3 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_8 \rightarrow \Delta_3 = 1$

$\Delta = 1 - \sum L_i + (L_5 L_7 + L_5 L_4 + L_4 L_3)$

مجموع دو به دوی حلقه های بی تماس

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 \Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

Scanned by CamScanner

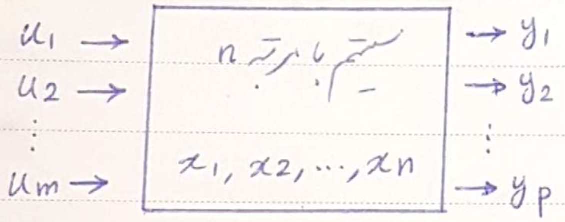
نمایش فضای حالت (State-Space Representation)

نمایش فضای حالت در حوزه زمان بوده و شهود فیزیکی بهتری به دست می‌دهد.

■ حالت (state): حداقل مقدار اطلاعاتی است که با داشتن آن در $t=t_0$ و با داشتن ورودی در $t \geq t_0$، آینده سیستم به طور کامل معلوم می‌شود.

■ متغیر حالت (state variable): مجموعه‌ای از حداقل تعداد متغیرها که حالت سیستم را بیان می‌کند. معمولاً آن را به صورت $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم. n را مرتبه سیستم می‌گوییم.

■ معادلات فضای حالت:



$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \qquad i = 1, \dots, n$$

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \qquad j = 1, \dots, p$$

(سیستم‌های تغییرپذیر با زمان)

به نمایش فوق، نمایش فضای حالت می‌گوییم.

با فرض TI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$$

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject
Date

فرض کنیم f و g توابع هموار باشند:

$$\dot{x} = f(x_0,u_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,u_0)} (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x_0,u_0)} (u-u_0) + \cdots$$

$$y = g(x,u) = g(x_0,u_0) + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,u_0)} (x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(x_0,u_0)} (u-u_0) + \cdots$$

فرض می‌کنیم: $f(x_0,u_0)=0$ (یعنی ما حول این نقطه صفر است، یعنی یک وضعیت پایدار سیستم را حول نقطه تعادل بررسی می‌کنیم)

در این صورت، با تعریف:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - x_0 \\ \tilde{u} = u - u_0 \\ \tilde{y} = y - g(x_0,u_0) \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} + \cdots \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} + \cdots \end{cases}$$

$\cdots$ → جملات غیرخطی

□ قضیه: اگر مقادیر ویژه A صفر یا مختلط محض نباشند، می‌توان به طور موضعی، از جملات غیرخطی صرف نظر کرد:

(صفر یا مختلط محض ← روی محور $j\omega$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(A: $n\times n$، B: $n\times m$، C: $p\times n$، D: $p\times m$)

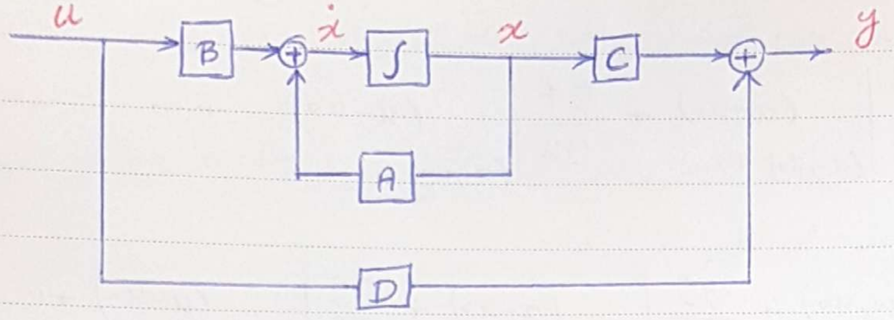
لذا به معادلات روبه‌رو می‌رسیم:

- یک استدلال کلی برای قضیه فوق آن است که اگر مقادیر ویژه روی محور $j\omega$ باشند، با اندک تغییراتی به طرف راست یا چپ محور می‌رود و پایداری مسأله تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

PAPCO

Subject

Date



* تابع تبدیل برخلاف نمایش‌های فضای حالت، لزوماً توصیف دقیق از رفتار درونی سیستم نمی‌دهد.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{p\times n}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{p\times m}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (*)$$

پاسخ معادله (*) با استفاده از تبدیل لاپلاس

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s) + (sI-A)^{-1}x(0)$$

یادآوری از معادلات دیفرانسیل:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots = \frac{1}{s}\left[I + s^{-1}A + s^{-2}A^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{s}\left[I - s^{-1}A\right]^{-1} = \left[sI - A\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + e^{At}x(0)$$

به e^{At} ماتریس انتقال حالت state transition matrix می‌گوییم.

* رابطه‌ی فضای حالت و تابع انتقال:

$$x(0) = 0 \rightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

فرض کنید P یک ماتریس $n\times n$ معکوس پذیر باشد. تعریف کنید: $\bar{x} = Px$

$$\dot{\bar{x}} = P\dot{x} = P(Ax + Bu) = PAP^{-1}\bar{x} + PBu$$
$$y = Cx + Du = CP^{-1}\bar{x} + Du$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\bar{A}}\bar{x} + \underbrace{PB}_{\bar{B}}u \\ y = \underbrace{CP^{-1}}_{\bar{C}}\bar{x} + \underbrace{D}_{\bar{D}}u \end{cases}$$

$$\bar{H}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$
$$= CP^{-1}(sI - PAP^{-1})^{-1}PB + D$$
$$= C(sI - A)^{-1}B + D = H(s) \Rightarrow \bar{H}(s) = H(s)$$

معادله مشخصه برابر $\det(sI - A) = 0$ است که قطب های سیستم را می دهد.
این قطب ها، همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.
مقادیر ویژه A و $\bar{A}$ یکی هستند.

نمایش های مختلف فضای حالت برای یک سیستم که تابع تبدیل یکتا دارد.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = bu$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1 + bu \end{cases}$$

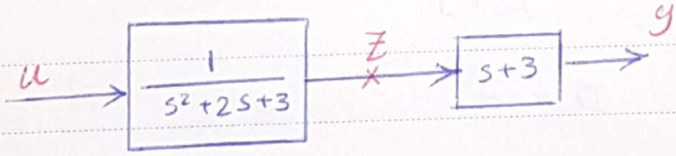
$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$

مثال

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+3}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = \dot{u} + 3u$$



$$\begin{cases} u = \ddot{Z} + 2\dot{Z} + 3Z \\ y = \dot{Z} + 3Z \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$z = x_1$$
$$\dot{z} = x_2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 3x_1 + u \\ y = x_2 + 3x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

به طریق مشابه، می توان نشان داد یک توصیف فضای حالت متناظر با تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} + d$$

به شکل زیر خواهد بود:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad D = d$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

— ارتباط فضای حالت و نمودارهای جریان (flow graph)

$\dot{x}_1 = x_2$

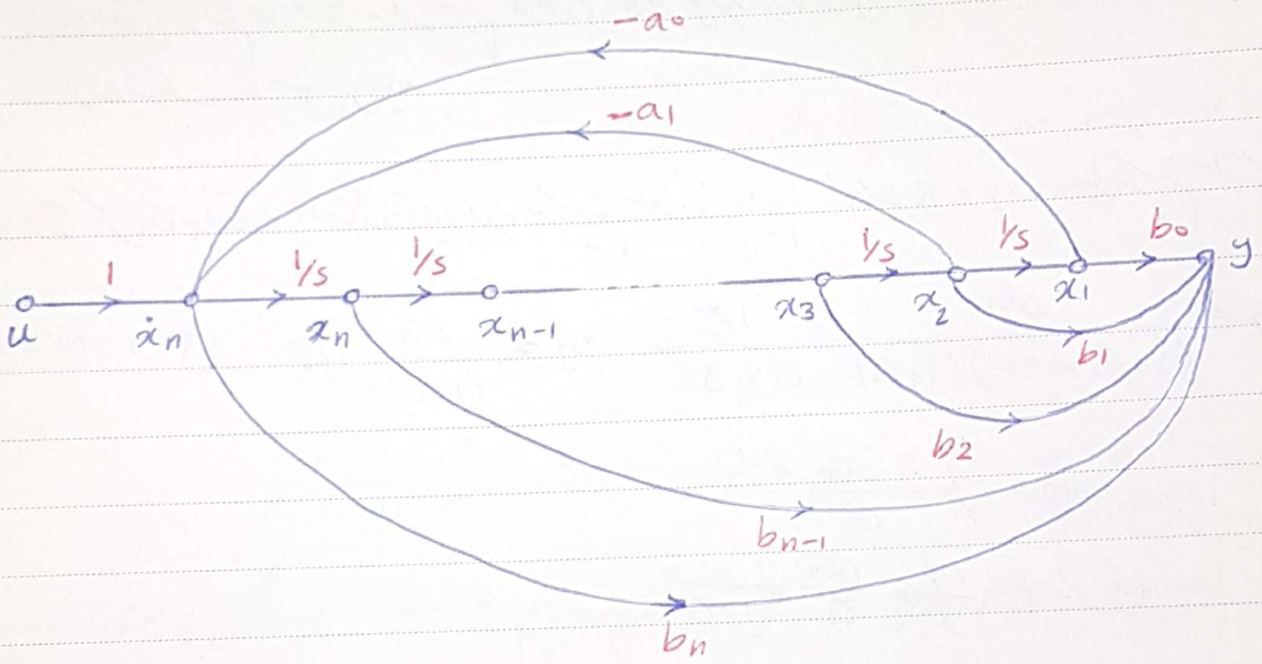
$\dot{x}_2 = x_3$

$\vdots$

$\dot{x}_{n-1} = x_n$

$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u$

$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_{n-1} x_n + du$



$P_0 = d \rightarrow \Delta_0 = \Delta = 1 + \frac{a_{n-1}}{s} + \frac{a_{n-2}}{s^2} + \cdots + \frac{a_0}{s^n}$

$P_1 = \frac{b_{n-1}}{s} \rightarrow \Delta_1 = 1$

$\vdots$

$P_n = \frac{b_0}{s^n} \rightarrow \Delta_n = 1$

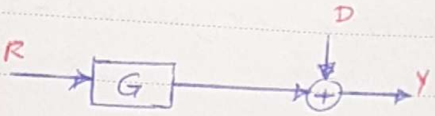
$$\Rightarrow G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta} = d + \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{n-i}}{s^i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{s^i}}$$

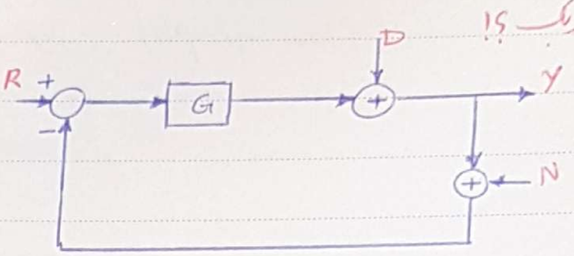
$$= \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

چرا فیدبک؟!





$$y = GR + D$$

$$y = \frac{G}{1+G}R + \frac{1}{1+G}D - \frac{G}{1+G}N$$

① اغتشاش در سیستم حلقه بسته، به طور مستقیم در خروجی ظاهر نمی‌شود و با فرض "بزرگ" بودن G، اثر D در Y توسط فیدبک کاهش می‌یابد.

② اگر G به اندازه ΔG تغییر کند، در سیستم حلقه باز داریم: $\Delta y = R\Delta G$، ولی در سیستم حلقه بسته:

$$\Delta y = \frac{\Delta G}{(1+G+\Delta G)(1+G)} \times R \xrightarrow[G \gg \Delta G]{\text{معمولاً}} \Delta y \simeq \frac{\Delta G}{(1+G)^2} \times R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{open loop: } \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\Delta G}{G} \\ \text{closed loop: } \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\Delta G}{G} \times \dfrac{1}{1+G} \end{cases}$$

اگر G بزرگ باشد، تأثیر نامعینی‌ها توسط فیدبک کاهش می‌یابد.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

- تعریف حساسیت (sensitivity)

فرض کنید $T(s)$ تابع تبدیل از R تا Y باشد. "حساسیت" را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_G^T = \lim_{\Delta G \to 0} \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta G}{G}} = \lim_{\Delta G \to 0} \frac{G}{T} \frac{\Delta T}{\Delta G}$$

در حالت حدی و به ازای تغییرات بسیار کوچک:

$$S_G^T = \frac{G}{T} \frac{\partial T}{\partial G}$$

* محاسبه‌ی حساسیت در سیستم‌های حلقه باز و حلقه بسته:

open loop: $T = G \rightarrow S_G^T = 1$

closed loop: $T = \frac{G}{1+G} \rightarrow S_G^T = (1+G) \cdot \frac{1}{(1+G)^2} = \frac{1}{1+G}$

فیدبک، حساسیت سیستم را نسبت به تغییرات کاهش می‌دهد.

اگر المان فیدبک با تابع تبدیل H را نیز به سیستم اضافه کنیم، محاسبات فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$T = \frac{G}{1+GH} \Rightarrow S_H^T = \frac{H}{T} \frac{\partial T}{\partial H} = \frac{-GH}{1+GH}$$

با بزرگ کردن G (به دلایل مذکور)، باید H را دقیق انتخاب کنیم، چرا که حساسیت سیستم نسبت به H زیاد می‌شود.

* اگر α یک پارامتر از سیستم باشد، حساسیت نسبت به α را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

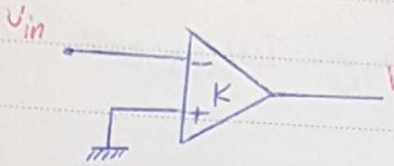
$$S_\alpha^T = S_G^T \times S_\alpha^G = \frac{1}{1+G} \times \frac{\alpha}{G} \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

PAPCO

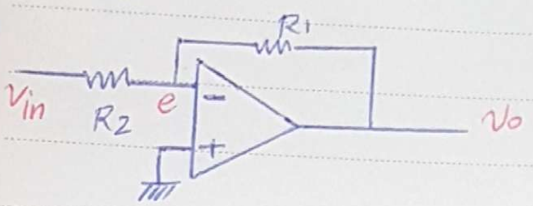
Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال: تقویت کننده عملیاتی



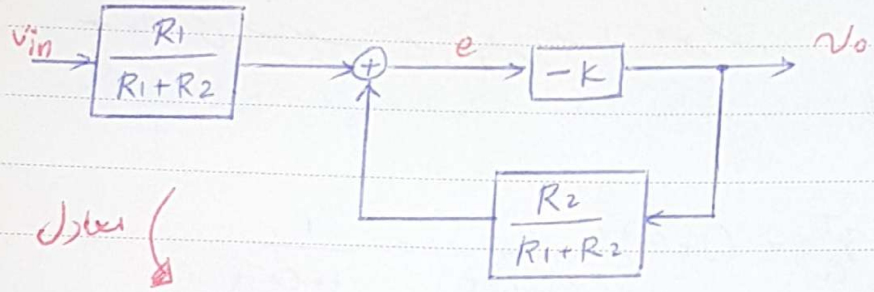
$V_o = -K V_{in}$



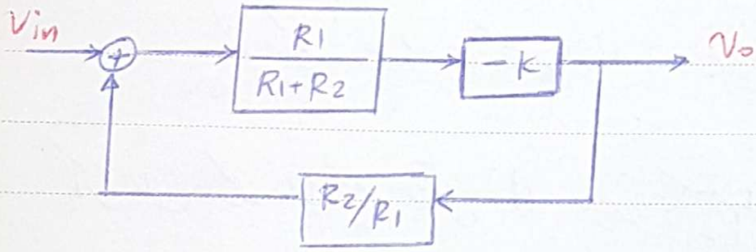
$$\frac{V_{in} - e}{R_2} \times R_1 + V_o = e$$

$$\rightarrow e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{in} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_o$$

$$V_o = -K e$$



معادل



$$\left(\beta = \frac{R_2}{R_1} = 0.001\right)$$

$$\left(K = 10^5\right)$$

$$T = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-K}{1 + \beta K} \Rightarrow S_K^T = \frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial K} = \frac{1}{1 + \beta K} \simeq 0.01$$

حساسیت نسبت به K کوچک است،

ولی حساسیت نسبت به β الزاماً کوچک نیست.

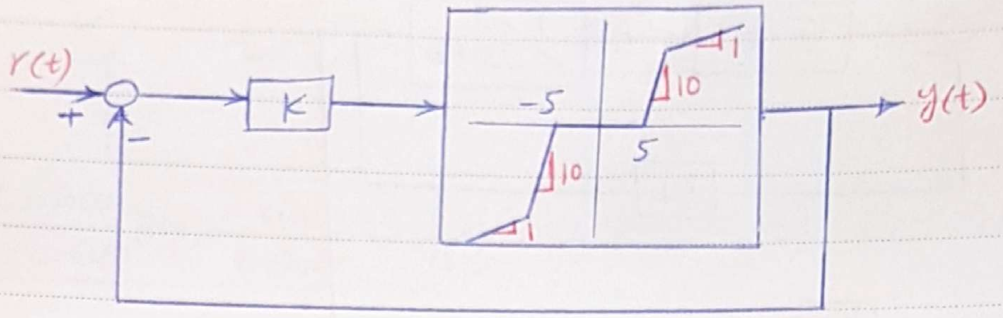
PAPCO

Scanned by CamScanner

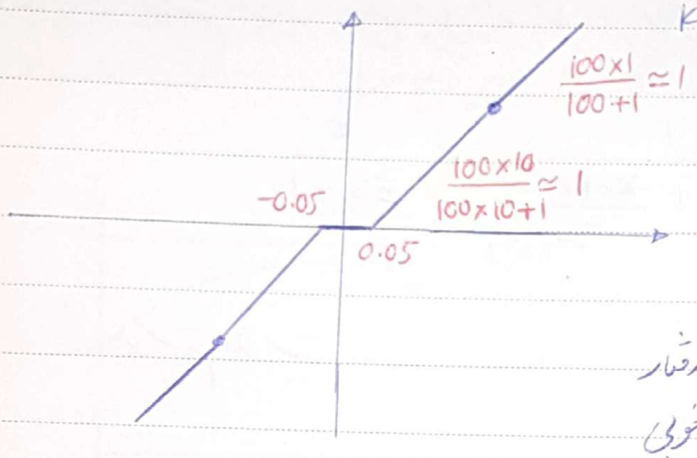
Subject
Date

۳) می‌توان با استفاده از فیدبک، اثر المان های غیرخطی در داخل حلقه را کاهش داد، به طوری که کل سیستم به صورت تقریباً خطی عمل کند:

(مثال)



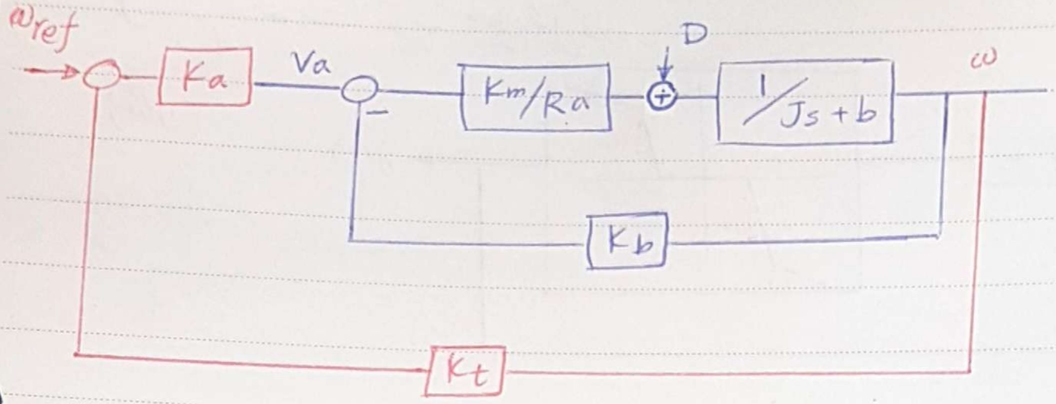
رابطه ورودی - خروجی برای K = 100



به ازای مقادیر بزرگ K، رفتار ورودی - خروجی با تقریب خوبی خطی شده است.

P4PCO

مثال موتور DC با کنترل آرمیچر



در سیستم حلقه باز، تابع تبدیل از D تا خروجی ω

$$\frac{\omega(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{Js+b}}{1+\frac{1}{Js+b}\times\frac{K_m K_b}{R_a}} = \frac{1}{Js+b+\frac{K_b K_m}{R_a}} = \frac{K}{\tau s+1}$$

در سیستم حلقه بسته:

$$\frac{\omega(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{Js+b}}{1+\frac{1}{Js+b}\left[\frac{K_m K_b}{R_a}+\frac{K_a K_t K_m}{R_a}\right]}$$

$$= \frac{1}{Js+b+\frac{K_m K_b}{R_a}+\frac{K_a K_t K_m}{R_a}} = \frac{K'}{\tau' s+1}$$

حلقه باز: $K = \frac{R_a}{R_a b + K_b K_m}$, $\tau = \frac{R_a J}{R_a b + K_m K_b}$

حلقه بسته: $K' = \frac{K_a K}{1+K_a K_t K}$, $\tau' = \frac{\tau}{1+K_a K_t K}$

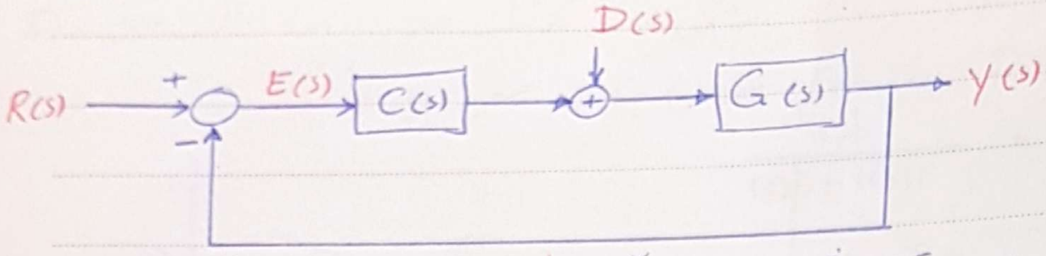
اثرات فیدبک   اثرات فیدبک

با تنظیم ka و kt، می‌توان ثابت زمانی و بهره را کوچک کرد تا سرعت damp شدن اغتشاش زیاد شده و میزان تضعیف آن نیز بیشتر شود.

همچنین می‌دانیم که حساسیت به نامعینی ها هم کم می‌شود.

Subject
Date

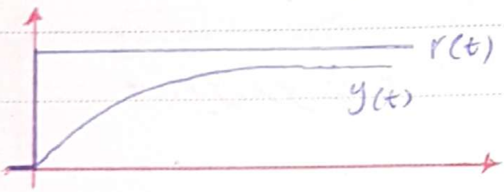
* توسط فیدبک می‌توان اختلالات خاص را حذف کرد و نیز فرمان‌های خاص را مطلقاً (بدون هیچ خطای ماندگار) اجرا نمود.



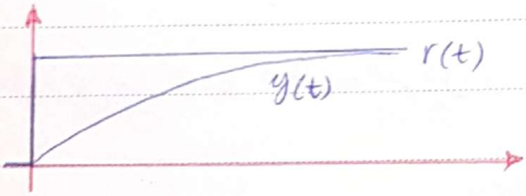
- تابع انتقال $C(s)\,G(s)$ را تابع انتقال حلقه باز می‌گوییم

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}D(s)$$

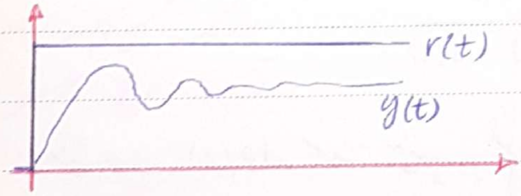
□ فرض کنید سیستم حلقه بسته پایدار و اغتشاش $D(s)$ صفر باشد. به علاوه فرض کنید $R(s)=\frac{n_r(s)}{d_r(s)}$ و هیچ یک از ریشه‌های $d_r(s)$، سمت چپ محور $j\omega$ نباشد. آن‌گاه خروجی $y(t)$ ورودی مرجع $r(t)$ را بدون خطای ماندگار دنبال می‌کند، اگر و فقط اگر قطب‌های تابع تبدیل $C(s)\,G(s)$، قطب‌های $R(s)$ را شامل شود.



→ حاصل‌ضرب $C(s)\,G(s)$ حتماً قطب $\frac{1}{s}$ ندارد.



→ حاصل‌ضرب $C(s)\,G(s)$ حتماً قطب $\frac{1}{s}$ دارد.



→ حاصل‌ضرب $C(s)\,G(s)$ حتماً قطب $\frac{1}{s}$ ندارد.

• تعبیر: اگر بهره حلقه باز در فرکانس‌های بی‌نهایت باشد، فرمان‌های $R(s)$ در آن فرکانس، بدون خطای ماندگار دنبال می‌شوند.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

- اثبات :

$$C(s)G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{d(s)}{n(s)+d(s)}$$

فرض کنید قطب های $C(s)G(s)$، قطب های $R(s)$ را شامل شود.

$$d(s) = \alpha(s)\, d_r(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{\alpha(s) d_r(s)}{n(s)+d(s)} \times \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = \frac{\alpha(s) n_r(s)}{n(s)+d(s)}$$

$$\Rightarrow e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,\alpha(s)\, n_r(s)}{n(s)+d(s)} = 0$$

- به دلیل فرض پایداری سیستم ← می‌توانیم از قضیه مقدار نهایی استفاده کنیم. مخرج کسر فوق، ریشه‌های سمت چپ محور $j\omega$ دارد.

حال فرض کنید $e(t)$ با زمان به صفر میل می کند :

$$E(s) = \frac{d(s)}{n(s)+d(s)} \times \frac{n_r(s)}{d_r(s)} = \frac{\gamma(s)}{d_r(s)} + \frac{\beta(s)}{n(s)+d(s)}$$

ریشه‌های $d_r(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ نیست ← $\gamma(s)=0$

$$\Rightarrow \frac{d(s)\, n_r(s)}{(n(s)+d(s))\, d_r(s)} = \frac{\beta(s)}{n(s)+d(s)}$$

← $d(s)$ بر $d_r(s)$ بخش پذیر است

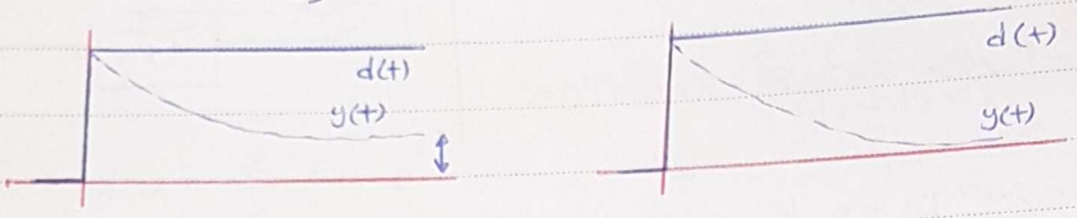
n_r و d_r عامل مشترک ندارند

PAPCO

Scanned by CamScanner

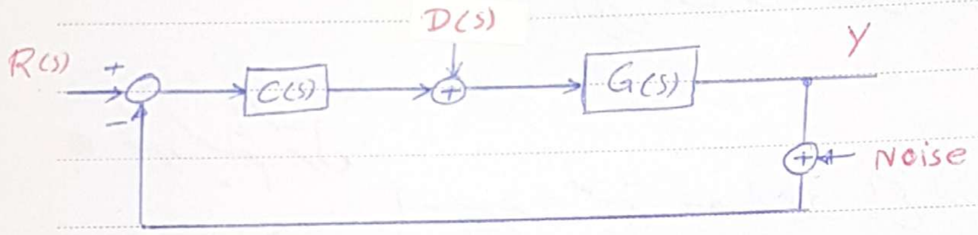
Subject
Date

□ ثابت‌ها با فرض پایداری سیستم حلقه بسته و $D(s)=\frac{n_d(s)}{d_d(s)}$ ، به طوری که هیچ یک از ریشه‌های $d_d(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار ندارند. می‌توان نشان داد که اگر قطب‌های $C(s)$ ، قطب‌های $D(s)$ را شامل باشد، اثر $D(s)$ بر روی خروجی با زمان به سمت صفر میل می‌کند.



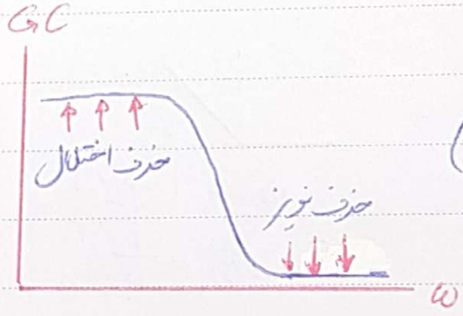
— اصولاً در عملکرد واقعی $D(s)$ را نمی‌دانیم، ولی با توجه به شناخت کلی‌ای که از اغتشاش داریم، آن را به طور تقریبی مدل می‌کنیم.

جنبه منفی حلقه فیدبک



$$y=\frac{-GC}{1+GC}N+\frac{GC}{1+GC}R+\frac{G}{1+GC}D$$

فیدبک می‌تواند باعث تقویت نویز سنسور شود. البته می‌توان رفتار فرکانسی GC را به گونه‌ای قرار داد که تا حدی این مسئله جبران شود.



(معمولاً اغتشاش در فرکانس پایین و نویز در فرکانس بالا است)

Scanned by CamScanner

٥ جمع بندی:

معیارهای ارزیابی سیستم ها با فرض پایدار بودن سیستم

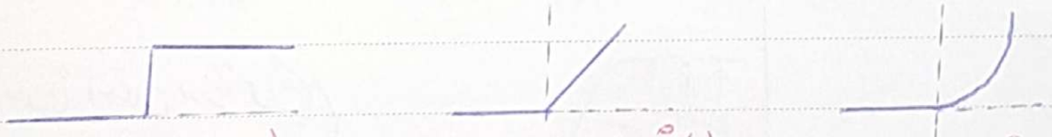
- Performance: سرعت سیستم - ردیابی ورودی مرجع - حذف یا کاهش اغتشاش - حذف نویز
- Robustness: قوام سیستم در برابر تغییرات

دو مفهوم عملکرد و قوام، عملاً باهم قابل اجتماع نیستند، چراکه زمانی که مسیر کاملاً مشخص است، می‌توان به بهترین نحو آن را پیمود، ولی زمانی که مشکلات نامعین و احتمالی در مسیر وجود دارد، باید بخش قابل توجهی از توان خود را هزینه‌ی پیش بینی و مراقبت از این مشکلات احتمالی بکنیم.

■ عملکرد سیستم کنترل:

- سرعت سیستم ← از طریق پاسخ گذرا تعیین می‌شود.
- دقت سیستم ← از طریق پاسخ ماندگار تعیین می‌شود.

- سیگنال ها:



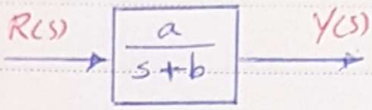
step (پله): $R(s) = \frac{1}{s}$

ramp (شیب): $R(s) = \frac{1}{s^2}$

parabola (سهمی): $R(s) = \frac{2!}{s^3}$

• پاسخ پله سیستم های مرتبه اول:

$$y(s) = G(s)\,R(s)$$



$$y(s) = \frac{a}{s+b} \times \frac{1}{s} = \frac{a/b}{s} + \frac{-a/b}{s+b}$$

$$\rightarrow\ y(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) \quad t \geq 0 \quad ،\quad y(\infty) = \frac{a}{b}$$

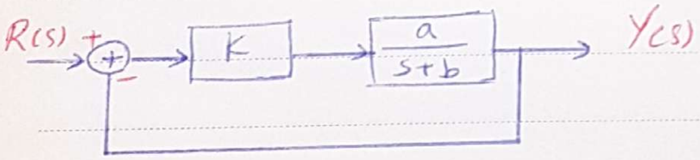
- زمان نشست (settling time) زمانی است که پاسخ به ٪98 یا ٪99 مقدار نهایی خود برساند.

$$T_s = \begin{cases} 5\tau & 99\% \\ 4\tau & 98\% \end{cases}$$

(ثابت زمانی، τ، زمانی است که پاسخ به ٪63 مقدار نهایی خود برسد.

- خطای ماندگار: $e_{ss} = \left|1 - \frac{a}{b}\right|$

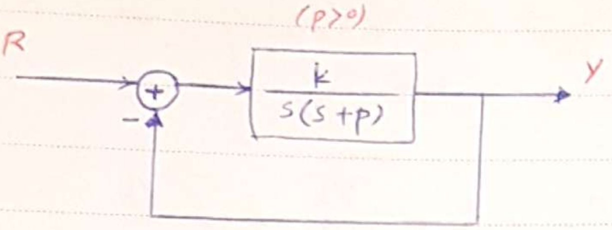
✓ توسط فیدبک، می توان هر دو این مشخصه ها را تغییر داد.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ka}{s+b+Ka}$$

Subject
Date

۰ پاسخ سیستم مرتبه ۲:



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(s+p)}}{1+\frac{k}{s(s+p)}} = \frac{k}{s(s+p)+1} = \frac{k}{s^2+sp+1} \triangleq \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

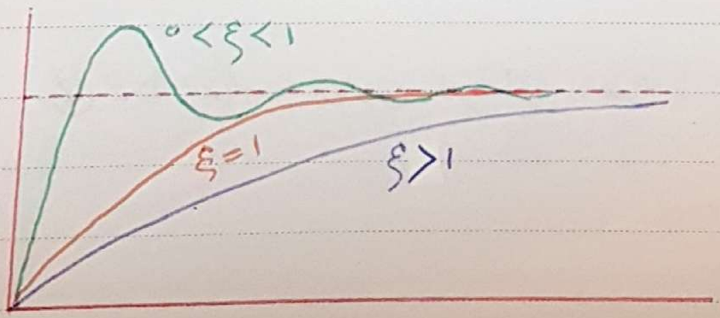
$\omega_n^2 > 0$

$2\xi\omega_n = P$

- پاسخ پله:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \theta\right) & 0<\xi<1 \\ \qquad \theta = \cos^{-1}\xi & \\ 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} & \xi = 1 \\ 1 - k_1 e^{-\lambda_1 t} - k_2 e^{-\lambda_2 t} & \xi > 1 \\ \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} & \end{cases}$$

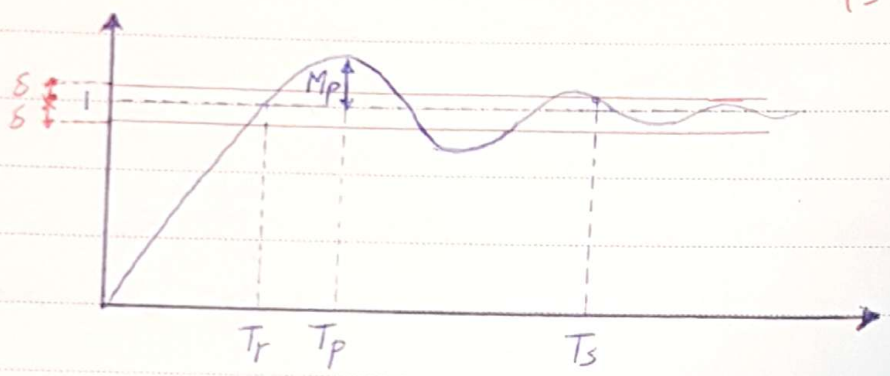


PAPCO

- ξ : Damping ratio نسبت میرایی
- ω_n : Natural frequency فرکانس طبیعی

$\begin{cases} \xi > 1 : \text{Overdamped} & \text{فوق میرا} \\ \xi = 1 : \text{Critically Damped} & \text{میرای بحرانی} \\ 0 < \xi < 1 : \text{underdamped} \end{cases}$

- برخی تعاریف در سیستم های underdamped :



- T_r : rise time زمان صعود
- T_p : Peak time
- $y(T_p)$: $1 + M_p$
- T_s : settling time زمان نشست

* δ معمولاً 0.01 یا 0.02 در نظر می گیریم.
* زمان نشست، زمانی است که پاسخ در محدوده $1 \pm \delta$ قرار می گیرد.
* زمان صعود (rise time) زمانی است که پاسخ برای اولین بار به 1 می رسد.

- نحوه محاسبه پارامترها :

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=T_p} = 0$$

$$\rightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$ → بالازدگی یا over shoot

اگر T_p را به جای t در $y(t)$ قرار دهیم:

$$P.O. = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100$$

ξ	P.O.
0.4	25%
0.5	16%
0.6	10%
0.7	5%
0.8	1.5%
0.9	0.2%

- محاسبه زمان نشست:

$$-\delta < \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} < \delta$$

$$\delta = 0.02 \rightarrow T_s \simeq \frac{4}{\xi \omega_n}$$

$$\delta = 0.01 \rightarrow T_s \simeq \frac{5}{\xi \omega_n}$$

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n} \rightarrow T_s : \begin{cases} 4\tau & 2\% \\ 5\tau & 1\% \end{cases}$$

- محاسبه زمان صعود:

برای زمان صعود می‌توان رابطه‌ی تقریبی زیر را پیشنهاد کرد:

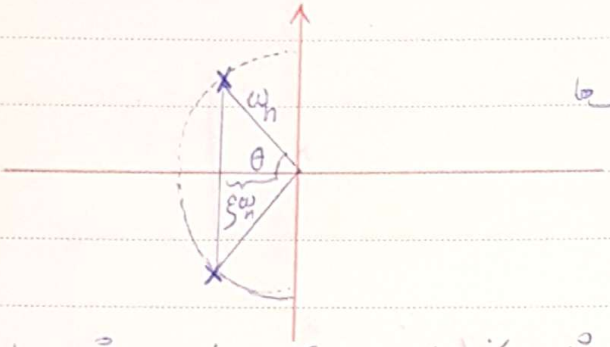
$$T_r \simeq \frac{2.16\xi + 0.6}{\omega_n}$$

برای $0.3 \leq \xi \leq 0.8$. این تقریب خوبی است و خارج از این محدوده دقتش را از دست می‌دهد.

PAPCO

□ $P.O = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100$ تنها به ξ بستگی دارد و با افزایش ξ مقدار بالازدگی کاهش می یابد، اما زمان صعود افزایش می یابد.

* می توان مشخصات پاسخ گذرا را به صورت محل قطب ها در صفحه مختلط بیان کرد.



قطب ها : $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$\cos\theta = \xi$

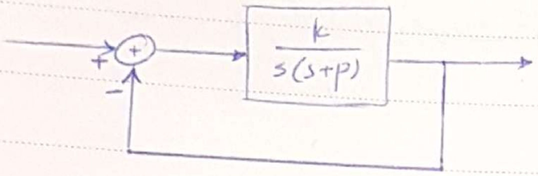
□ اگر قطب ها روی مکان $\xi = constant$ باشند، پاسخ همواره P.O ثابت خواهد داشت، ولی ω_n (فاصله قطب ها تا مبدا) تغییر می کند. با حرکت به سمت چپ، ω_n بیشتر و فرکانس نوسانات بیشتر می شود.

□ اگر قطب ها روی خط عمودی $\xi\omega_n = constant$ حرکت کنند، مقدار T_s ثابت خواهد بود. وقتی به سمت بالا حرکت کنیم، ξ کاهش می یابد و P.O% افزایش می یابد.

□ اگر قطب ها روی نیم دایره $\omega_n = constant$ حرکت کنند، هرچه به سمت محور موهومی نزدیک شوند، ξ کمتر و P.O% بیشتر می شود.

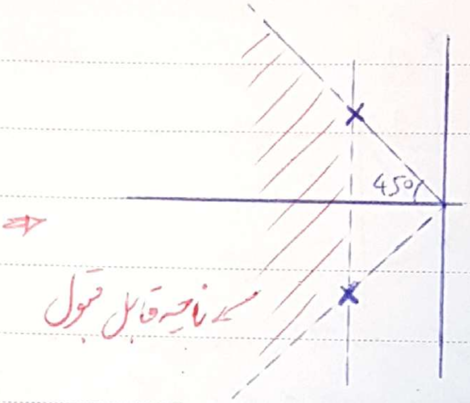
Subject
Date

مثال: مقدار k و p را چنان تعیین کنید که جهش در پاسخ پله از ٪5 بیشتر نباشد و زمان نشست از 4 ثانیه بیشتر نباشد. (معیار زمان نشست را 0.02 می‌گیریم)



$$T_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \leq 4 \rightarrow \xi \omega_n \geq 1$$

$$e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.05 \Rightarrow \xi \geq 0.7$$



مثلاً: $\xi \omega_n = 1 , \xi = 0.7 \rightarrow \omega_n = \frac{1}{0.7}$

$$s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 = s^2 + ps + k \Rightarrow k = \omega_n^2 = 2 \quad , \quad p = 2\xi\omega_n = 2$$

- می‌توانیم در ξ ثابت، مقدار ω_n را بسیار زیاد کنیم و شرایط مسأله بازهم برقرار است، با این حال این کار سیستم را دچار نوسانات بسیار شدید ($\omega_n \uparrow$) می‌کند که این می‌تواند موجب آسیب Actuator و نیز تشدید نویز شود.

PAPCO

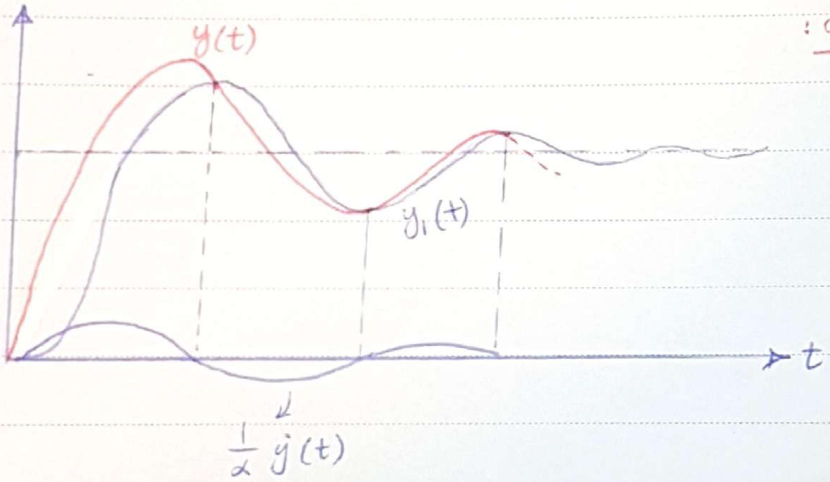
- تأثیر صفر بر پاسخ سیستم:

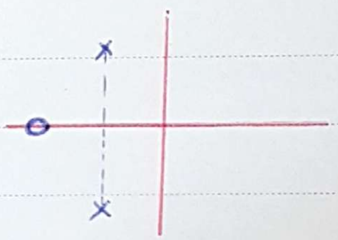
$$T(s)=\frac{\omega_n^2\left(\frac{1}{\alpha}s+1\right)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

* پاسخ سیستم بدون صفر : $y_1(t)$

* پاسخ سیستم در حضور صفر : $y(t)=y_1(t)+\frac{1}{\alpha}\dot{y}_1(t)$

: $\alpha>0$

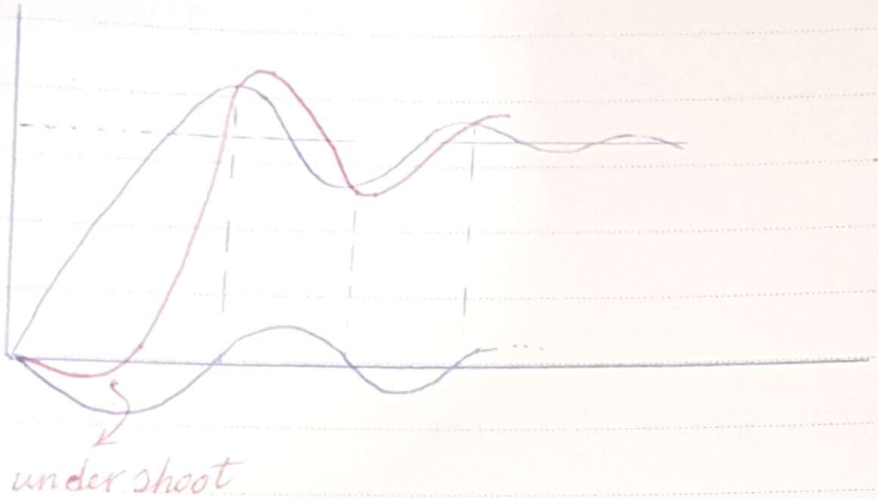


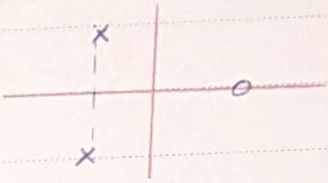


□ هر چه α بزرگ‌تر باشد، تأثیر جمله مشتق کمتر می‌شود و با نزدیک شدن صفر به قطب‌ها، جابکی سیستم افزایش می‌یابد $(T_r\downarrow)$ ولی بالازدگی بیشتر می‌شود $(P.O\uparrow)$

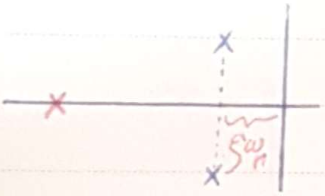
□ چنانچه $\alpha<0$ (صفر سمت راست) ممکن است پدیده پایین‌زدگی (undershoot) در پاسخ مشاهده شود. سیستمی که صفر سمت راست محور ها دارد، non-minimum phase (غیر مینیمم فاز) می‌گوییم

Scanned by CamScanner





اثر قطب سوم بر پاسخ سیستم مرتبه ۲



$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(\frac{1}{\gamma}s+1)}$$

می‌توان کسر فوق را به کسرهای جزئی تفکیک و لذا پاسخ پله، ۲ جزء خواهد داشت:

① پاسخ به جزء مرتبه ۲

② پاسخ به $\frac{1}{\frac{1}{\gamma}s+1}$ ← این جزء پاسخ به صورت $e^{-\gamma t}$ تغییر می‌کند، هرچه γ بزرگتر باشد، اثر آن در پاسخ کمتر است.

* اگر $\gamma > 10\xi\omega_n$ ، تفاوتی با چشم بین پاسخ $T(s)$ و پاسخ به جزء مرتبه ۲ دیده نمی‌شود. لذا اگر γ بزرگ باشد، می‌گوییم دو قطب مزدوج مختلط مسلط (dominant poles) است. و قطب سوم غیر مسلط است.

با کم کردن γ ، تاثیر آن در پاسخ بیشتر است و برای حوالی $\gamma < 4\xi\omega_n$ این تفاوت به راحتی قابل مشاهده است.

نکته مهم: اگر صفر یا قطبی "دور" باشند، تاثیر آن‌ها را پاسخ قابل چشم‌پوشی است. در این صورت زوج قطب مختلط رفتار سیستم را تعیین می‌کند.

PAPCO

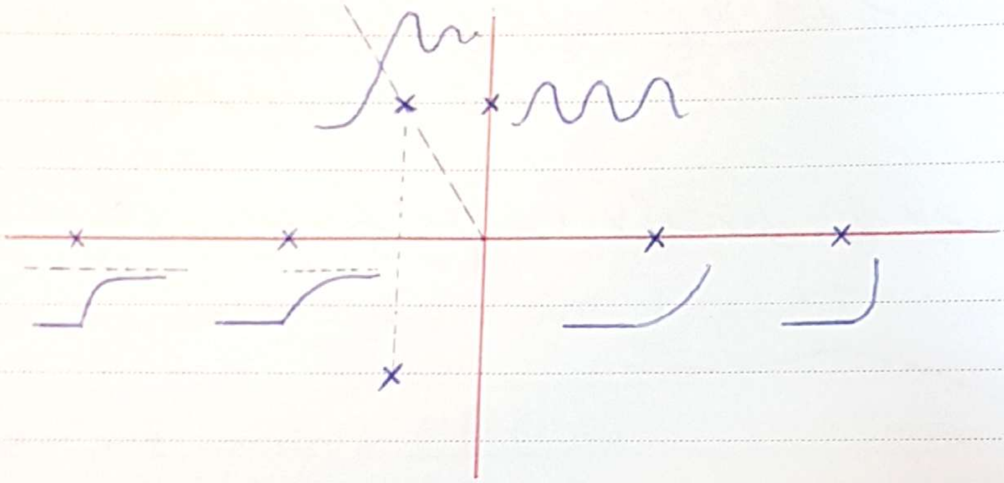
Scanned by CamScanner

Subject :
Date

رابطه کیفی پاسخ پله و محل قطب ها:

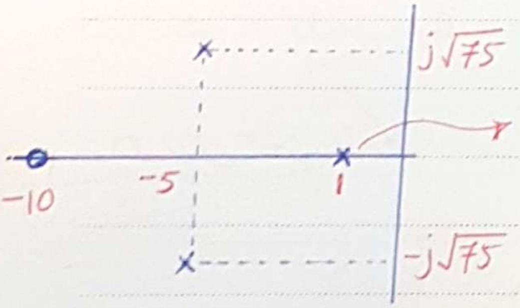
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

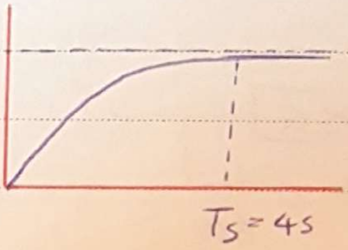
$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_i \frac{A_i}{s+s_i} + \sum_k \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2}$$



مثال

$$T(s) = \frac{10(s+10)}{(s+1)(s^2+10s+100)}$$

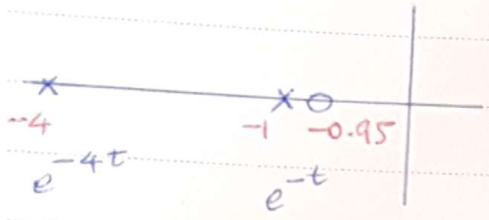




Scanned by CamScanner

مثال

$$T(s) = \frac{400(s+0.95)}{95(s+1)(s+4)}$$

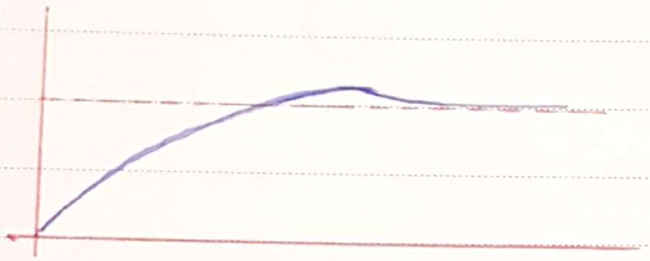


پاسخ پله: $y(t) = 1 + \underbrace{\frac{20}{3\times 95}}_{A} e^{-t} - \underbrace{\frac{100\times 3.05}{95\times 3}}_{B} e^{-4t}$

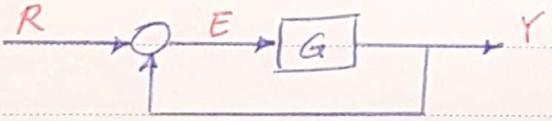
$B >> A$ ⟵ می‌توان ترم غالب را e^{-4t} در نظر گرفت.

بدون محاسبه‌ی $y(t)$ هم می‌شد این نتیجه‌گیری را انجام داد، چراکه صفر و قطب بسیار نزدیک به هم، تقریباً اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

می‌توان سیستم را با یک سیستم مرتبه 1 با ثابت زمانی $1/4$ تقریب زد.



□ بررسی خطای ماندگار:



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$E(s)$: سیگنال خطا

خطای ماندگار: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$

"با فرض پایداری"

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

- حال اگر ورودی پله باشد:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \times \frac{\frac{1}{s}}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(0)}$$

$$= \frac{1}{1+k_p}$$ k_p: ثابت خطای موقعیت position constant error

$$G(s) = K \frac{\prod_i (s+z_i)}{\prod_j (s+z_j)}$$ ← $p_j \neq 0$ (type 0) سیستم نوع صفر

$$G(0) = k_p = \frac{k \prod_i z_i}{\prod_j p_j}$$

(تعریف: توان s در مخرج تابع تبدیل G(s) را عدد تایپ (type number) می‌گوییم)

$$\text{type number} = 1 \rightarrow G(s) = \frac{k \prod_i (s+z_i)}{s \prod_j (s+z_j)} \quad (p_j \neq 0)$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim \frac{s}{1+G(s)} \times \frac{1}{s} = 0$$

خطای ماندگار به ورودی پله نداریم

- حال فرض کنیم به سیستم با type number = 1، ورودی شیب اعمال کنیم:

$$r(t) = t \quad t \geq 0$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \times \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{R(s)} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$$\text{type number} = 1 \rightarrow \lim_{s\to 0} sG(s) = k_v$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v}$$

ثابت خطای سرعت (velocity constant error)

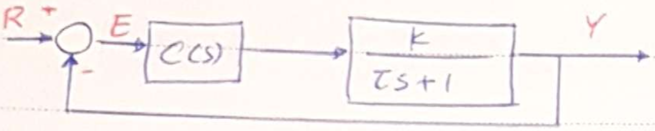
Scanned by CamScanner

Subject:
Date:

به راحتی می‌توان دید که اگر عدد تایپ 2 یا بیشتر باشد، خطای ماندگار به ورودی شیب برابر صفر می‌شود.

$(e_{ss} = \frac{1}{k_v})$

$$k_v = \begin{cases} 0 & \text{type number} = 0 \\ \text{محدود} & \text{type number} = 1 \\ \infty & \text{type number} \geq 2 \end{cases}$$



مثال به ازای

$$\begin{cases} C(s) = C_0 \\ C(s) = \frac{C_0 + C_1 S}{s} \end{cases}$$

خطای ماندگار به ورودی پله و شیب را محاسبه کنید.

○ $C(s) = C_0 \rightarrow e_{ss}$ (ورودی پله) $= \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+C_0 K}$

خطای ماندگار به ورودی شیب $\rightarrow \infty$

○ $C(s) = \frac{C_0 + C_1 S}{s} \rightarrow G(s) = \frac{K(C_0 + C_1 S)}{s(\tau s+1)}$

type number = 1

خطای ماندگار به پله $= 0$

خطای ماندگار به شیب $= \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)} = \frac{1}{K C_0}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

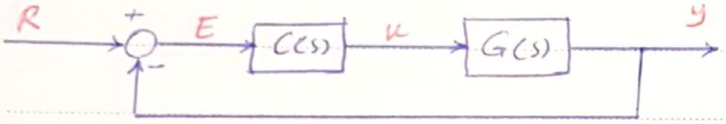
Subject:
Date

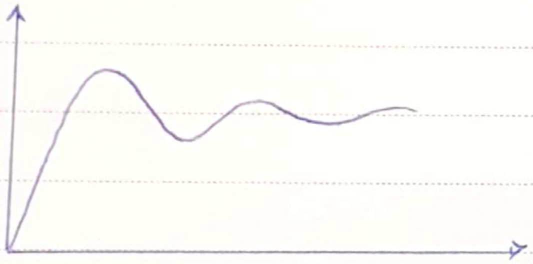
○ جمع بندی:

خطای ماندگار:

type	step	ramp	parabolic	cubic
0	$\frac{1}{K+1}$	∞	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K}$	∞	∞
2	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
3	0	0	0	$\frac{1}{K}$

■ شاخص های عملکرد





پاسخ پله "خوب"؟

○ می‌توان یک اندازه برای کوچک کردن سیگنال خطا تعریف کرد:

$$ISE = \int_0^\infty e^2(t)\,dt$$ → خطاهای بزرگ‌تر، مهم‌تر هستند

(Integral Square Error)

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)|\,dt$$ → وزن یکسانی برای خطاهای مختلف وجود دارد

(Integral Absalute Error)

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

$$ITSE = \int_0^\infty t\,e^2(t)\,dt \rightarrow$$

- در زمان های بزرگ، خطا مهم تر است.
- خطاهای بزرگ، مهم تر هستند.

(Integral Time Square Error)

$$ITAE = \int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt \rightarrow$$

- در زمان های بزرگ، خطا مهم تر است.
- وزن برای همه خطاها یکسان است.

(Integral Time Absolute Error)

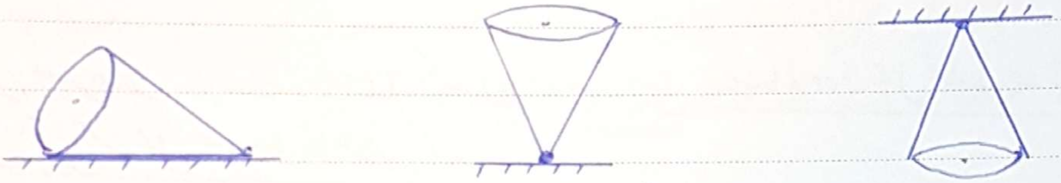
PAPCO

Scanned by CamScanner

پایداری سیستم های LTI

■ تئوری پایداری:
- پایداری نقطه تعادل (نقطه تعادل محلی است که سیستم اگر در آن قرار بگیرد، تا ابد باقی می ماند)
- پایداری ورودی - خروجی BIBO: Bounded Input-Bounded Output

◁ پایداری نقطه تعادل:



نقطه تعادل پایدار بجانبی — نقطه تعادل ناپایدار — نقطه تعادل پایدار

⟶ Reading: Respect the Unstable, 2003

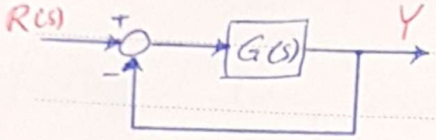
◁ پایداری ورودی - خروجی:

یک سیستم با ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ از نظر ورودی - خروجی پایدار است (BIBO)، اگر ورودی های محدود (کران دار) منجر به خروجی های محدود (کران دار) شوند. به عبارتی، اگر $\forall t: |u(t)| \leq m$ آن گاه بتوان کران M را یافت که $\forall t: |y(t)| \leq M$ برقرار باشد.

■ همان طور که می دانیم، در سیستم های LTI (و علّی) به فرم $G(s) = \frac{P(s)}{q(s)}$ پایداری ورودی - خروجی (که از این به بعد به اختصار آن را پایداری می گوییم) معادل است با این که تمام ریشه های چندجمله ای مخرج تابع تبدیل ($q(s) = 0$) یا معادلاً قطب های سیستم سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشد.

Subject:
Date

□ اهمیت پایداری در سیستم های فیدبک :



$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

فرض کنید $G(s) = \frac{P(s)}{q(s)}$ و ریشه‌های $q(s)=0$ قطب های $G(s)$ هستند

$T(s) = \frac{P(s)}{P(s)+q(s)}$ ، محل ریشه‌های $P(s)+q(s)=0$ قطب های حلقه‌بسته $T(s)$ هستند

از طرفی صفرهای $G(s)$ و $T(s)$ یکسان هستند، یعنی feedback محل قطب ها را تغییر می دهد، بدون آن که محل صفرها را عوض کند.

■ معیار Routh-Hurwitz برای بررسی پایداری

فرض کنید $\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ معادله مشخصه سیستم کنترل باشد. معیار R-H شرط لازم و کافی برای آن که ریشه‌های معادله سمت چپ محور jω باشند را ارائه می دهد، و اگر شرط برقرار نبود، تعداد ریشه‌های سمت راست یا احیاناً روی محور jω را هم بدست می دهد.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\dots$
s^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$		
s^0	h_0			

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$b_{n-2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-4} = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad , \dots$$

$$c_{n-3} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}}{b_{n-2}} \qquad c_{n-5} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}}{b_{n-2}}$$

□ تعداد ریشه‌های $\Delta(s)=0$ در نیم صفحه راست صفحه مختلط، برابر تعداد تغییر علامت‌های ستون اول جدول R-H است.

□ شرط لازم و کافی برای این که ریشه‌های معادله مشخصه سمت چپ محور $j\omega$ باشند، این است که در ستون اول جدول، تمام درایه‌های غیرصفر و متحدالعلامه باشند.

مثال $\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	$\frac{a_1 a_0 - 0}{a_1}$	

$$\frac{a_1 a_0}{a_1} = a_0$$

⇐ شرط لازم و کافی برای آن که ریشه‌ها همگی سمت چپ محور $j\omega$ باشند، این است که ضرایب a_2 ، a_1 ، a_0 هم علامت باشند.

مثال $\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	b_1	0
s^0	c_0	

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_2}$$

$$c_0 = a_0$$

شرط لازم و کافی پایداری: a_0 ، a_2 ، a_3 ، $\frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_2}$ هم علامت باشند.

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

از جلسه قبل: شرط لازم و کافی برای این که ریشه های معادله مشخصه سمت چپ محور $j\omega$ باشد، این است که در ستون اول جدول، تمام درایه ها، غیر صفر و متحد العلامه باشند.

▫ حالت های خاص:

(۱) یک عنصر از ستون اول جدول صفر گردد، اما کل آن سطر صفر نباشد. در این صورت به جای صفر، مقدار ε را قرار می دهیم و جدول را کامل می کنیم. حال ε را به سمت صفر میل داده و تعداد تغییر علامت ها را محاسبه می کنیم.

مثال

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	~~0~~ $\varepsilon \to 0^+$	6	
s^2	$\frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon} \to -\infty$	10	
s^1	$a \to 6$		
s^0	10		

$\left(a = 6 - \frac{10\varepsilon^2}{4\varepsilon-12}\right)$

← ۲ تغییر علامت داریم، لذا ۲ ریشه سمت راست وجود دارد.

✓ می توان برای بهره مندی از روش R-H از راه حل های دیگری هم بهره گرفت. مثلاً می توان معادله مشخصه جدیدی را با اضافه کردن یک ریشه سمت چپ $j\omega$ تشکیل داد.

$$D_2(s) = (s+1)(s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10)$$
$$= s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 21s + 10$$

s^6	1	4	15	10
s^5	3	6	21	0
s^4	2 ↙①	8	10	
s^3	-3 ↙②	-6		
s^2	4			
s^1	4.5			
s^0	10			

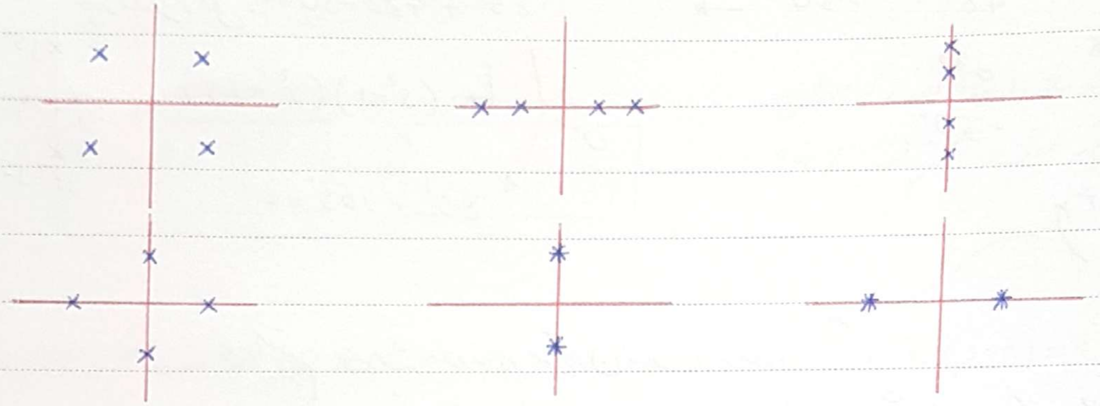
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

(۲) یک سطر از جدول کاملاً صفر شود.

در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ است.



راه حل: سطر بالای سطر صفر را در نظر می‌گیریم، به چندجمله‌ای متناظر با آن، چندجمله‌ای کمکی (auxiliary polynomial) می‌گوییم. می‌توان ثابت کرد ریشه‌های چندجمله‌ای کمکی، زیرمجموعه‌ای از ریشه‌های معادله هستند، که نسبت به مبدأ متقارن اند.

s^n

s^{n-1}

$\vdots$

s^{2k} ⟶ $2k$ ریشه متقارن را نسبت به مبدأ تحویل می‌دهد ← چندجمله‌ای کمکی

s^{2k-1} 0   0   0   ...   0

$\vdots$

s^0

* اگر از چندجمله‌ای کمکی مشتق بگیریم و ضرایب مشتق را به جای سطر صفر قرار دهیم و جدول را کامل کنیم، نتیجه R-H برای جدول تجدید برقرار است.

Scanned by CamScanner

مثال

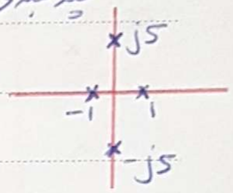
$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0 (8)	0 (96)	
s^2	24	-50	
s^1	112.7		
s^0	-50		

→ چندجمله‌ای کمکی: $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$

↳ $(s^2-1)(s^2+25)$

مشتق → $8s^3 + 96s = 0$



می‌دانستیم ۴ ریشه دو به دو متقارن نسبت به مبدأ موجود است. چون یک تغییر علامت مشاهده شد، پس یک ریشه سمت راست و یک ریشه سمت چپ دارد. پس ۲ ریشه باقی مانده روی محور jω هستند.

↓

یک ریشه سمت راست

۲ ریشه روی محور jω

باقی ریشه‌ها سمت چپ

پایداری نسبی

می‌توان سیستمی را پایدارتر از سیستم دیگر قلمداد کرد. اساساً هرچه قطب‌ها متناظر با میرایی بیشتری باشند، سیستم پایدارتر است.

مثال کلیه مقادیر k و τ را طوری تعیین کنید که قطب‌های سیستم حلقه بسته، سمت چپ خط $s=-a$ قرار گیرند. $(a>0)$

معادله مشخصه: $\tau s^2 + s + k = 0$

تغییر متغیر $s = p + a$ را اعمال کنید.

Scanned by CamScanner

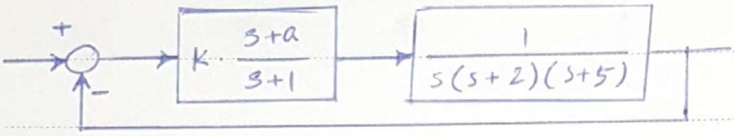
Subject:
Date

$$\tau (p-a)^2 + (p-a) + k = 0$$

$$\tau p^2 + (1-2a\tau)p + a^2\tau - a + k = 0$$

$$\tau > 0 \,, \quad 1-2\tau a > 0 \,, \quad a^2\tau - a + k > 0$$

مثال: مقادیر a و k را پیدا کنید، که خطای دائمی به ورودی شیب کمتر از 24% باشد.



معادله مشخصه حلقه بسته : $1+G(s)=0 \rightarrow s(s+2)(s+5)(s+1) + k(s+a) = 0$

$$\Rightarrow s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (10+k)s + ka = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{\frac{ka}{10}} = \frac{10}{ka} < 0.24 \Rightarrow ka > 42$$

حال با استفاده از جدول R-H، پایداری را بررسی می‌کنیم

s^4	1	17	ka
s^3	8	$10+k$	0
s^2	$\frac{126-k}{8}$	ka	
s^1	$\frac{(10+k)(126-k)-64ka}{126-k}$		
s^0	ka		

شرط لازم و کافی برای پایداری :

$$\begin{cases} k < 126 \\ ka > 0 \\ (k+10)(126-k) - 64ka > 0 \end{cases}$$

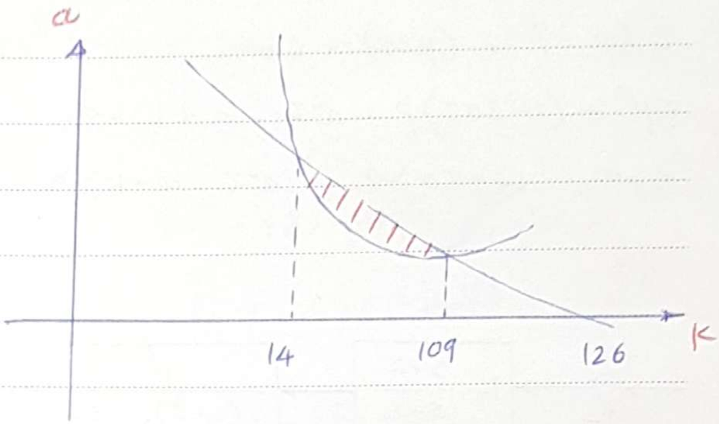
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

پایداری
$$\begin{cases} k < 126 \\ ka > 0 \\ (k+10)(126-k) - 64ka > 0 \end{cases}$$

$ka > 42$

خطای ماندگار



جایگذاری $ka = 42$: $(k+10)(126-k) - 64 \times 42 = 0$

$\downarrow$

$k = 14, 109$

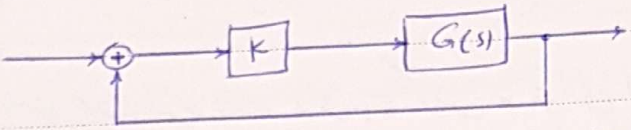
$14 < k < 109$

$$\frac{42}{k} < a < \frac{(k+10)(126-k)}{64k}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

روش Root Locus (مکان هندسی ریشه‌ها)



$$G(s)=\frac{P(s)}{q(s)} \Rightarrow T(s)=\frac{kP(s)}{kP(s)+q(s)}$$

- قطب‌های حلقه بسته ریشه‌های $q(s)+kP(s)=0$ هستند که با تغییر k تغییر می‌کنند.

- مکان هندسی ریشه‌های $1+KG(s)=0$ را وقتی $k\in\mathbb{R}$ تغییر کند، مکان هندسی ریشه‌ها می‌گوییم. «چگونه این مکان را به دست آوریم؟»

* فرض کنید s روی مکان هندسی باشد، یعنی $1+KG(s)=0$ (فرض کنید $k>0$)

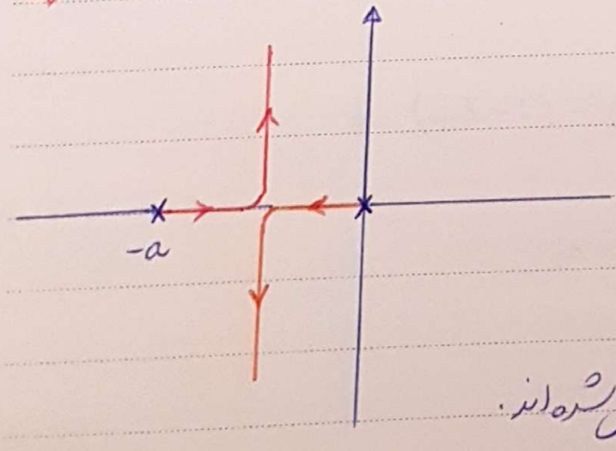
شرط اندازه: $K|G(s)|=1$

شرط فاز: $\angle G(s)=(2l+1)\pi \quad , \quad l\in\mathbb{Z}$

مثال: $G(s)=\frac{1}{s(s+a)}$ ، مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته را رسم کنید. $a>0$

شرط زاویه: $\angle G(s) = -\angle s - \angle s+a = (2l+1)\pi$

$\Rightarrow \angle s+\angle s+a=(2l+1)\pi$



هیچ نقطه‌ای در ناحیه اول و چهارم نمی‌تواند شرط زاویه را برآورده سازد.

تمام نقاطی که روی ۲ شاخه نشان داده شده‌اند، شرط زاویه را برآورده می‌سازند و می‌توان نشان داد که هیچ نقطه دیگری در صفحه مختلط شرط زاویه را برآورده نمی‌سازد، لذا نقاط مکان هندسی به طور کامل مشخص شده‌اند.

Subject:
Date

■ شرط اندازه:

$$k = |s| \cdot |s+a|$$

اصولاً همیشه شرط زاویه برای پیدا کردن پاسخ کافی است و فایده‌ی شرط اندازه آن است که k متناظر با محل قطب ها روی نمودار را پیدا کنیم.

* ترسیم مکان ها در حالت کلی:

$$1 + K\,G(s) = \frac{k\,(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

□ قوانین ترسیم:

- قانون اول: برای $K \to 0$، قطب های سیستم حلقه‌بسته نزدیک قطب های $G(s)$ هستند.

- قانون دوم: برای $K \to \infty$، قطب های سیستم حلقه‌بسته نزدیک صفرهای $G(s)$ هستند.

* فرض: تعداد صفرهای $G(s)$، بیشتر از تعداد قطب های آن نیست.

$1 + K\,G(s)$ → قانون اول: $(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n) + K\,(s+z_1)\cdots(s+z_m) = 0$ ($K \to 0$)

$$K \to 0 \Rightarrow s_i \to -p_i$$

قانون دوم: $\frac{1}{K}\left[(s+p_1)\cdots(s+p_n)\right] + (s+z_1)\cdots(s+z_m) = 0$ ($\frac{1}{K} \to 0$)

$$k \to \infty \Rightarrow s_i \to -z_i$$

PAPCO

Subject:
Date

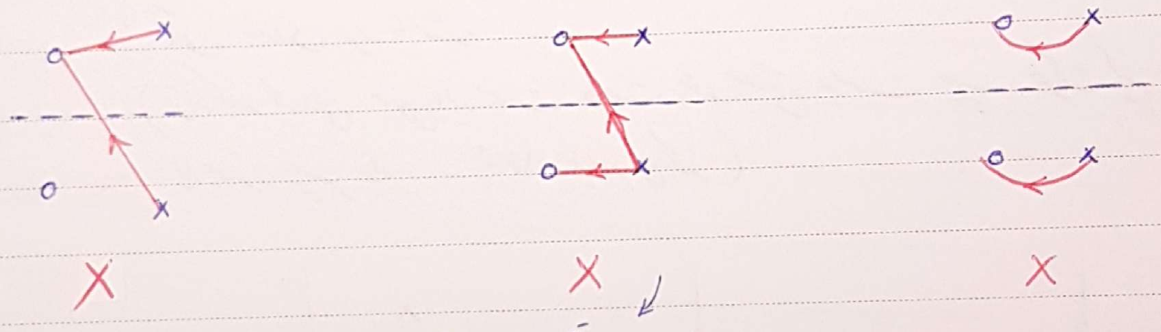
قانون سوم: مکان هندسی از n شاخه تشکیل شده است که n-m تای آن‌ها به ∞ می‌رود. هر شاخه متناظر با یکی از قطب‌ها است.

(در واقع با احتساب صفرها و قطب‌ها در ∞، برای هر عبارت گویا برحسب s، تعداد صفرها و قطب‌ها برابر است. لذا اختلاف درجه صورت و مخرج تعداد صفرها در ∞ را می‌دهد)

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \xrightarrow{s=\lambda^{-1}} G(\lambda^{-1}) = \frac{\lambda}{\lambda+1} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \rightarrow s=\infty & \text{صفر در} \\ \lambda = -1 \rightarrow s=-1 & \text{صفر در} \end{cases}$$

قانون چهارم: مکان هندسی نسبت به محور حقیقی متقارن است.

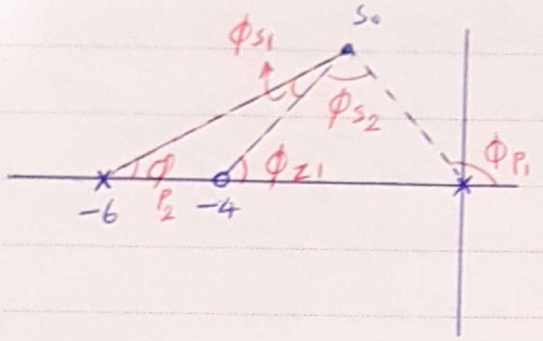


علاوه بر عدم تقارن، عملاً ۳ قطب دارد که با بهره K شدنی نیست.

PAPCO

Subject:
Date:

مثال: آیا s_0 می‌تواند قطب حلقه بسته (متعلق به مکان هندسی ریشه ها) به ازای مقداری از k باشد؟



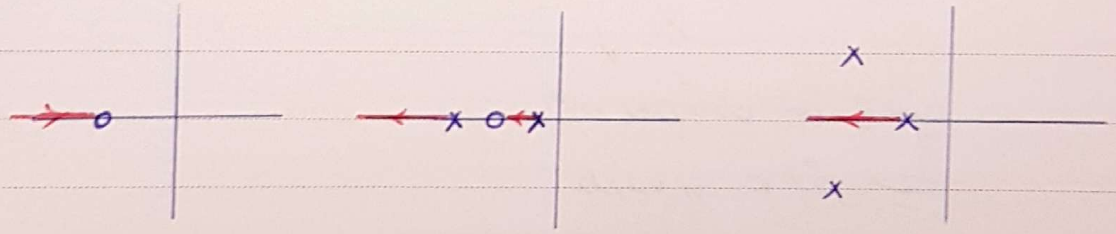
$$G(s) = \frac{s+4}{s(s+6)}$$

$$\phi_{p_1} + \phi_{p_2} - \phi_{z_1} = \phi_{p_2} + \phi_{s_1} + \phi_{s_2} + \phi_{p_2} - (\phi_{p_2} + \phi_{s_1})$$

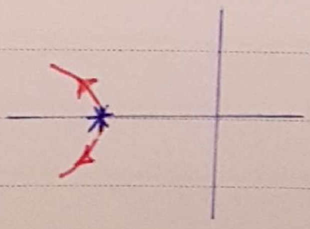
$$= \phi_{p_2} + \phi_{s_2} < \phi_{z_1} + \phi_{s_2} < \pi$$ → s_0 به ازای هیچ k ای قطب حلقه بسته نیست

قانون پنجم: آن نقاطی از محور حقیقی جزء مکان هستند که مجموع تعداد صفرها و قطب ها در سمت راست آن عددی فرد باشد.

(توجه کنید که وقتی منتهی الیه سمت راست محور حقیقی به سمت چپ حرکت کنیم، هر قطب یا صفر تغییر زاویه $180°$ ایجاد می‌کند.)



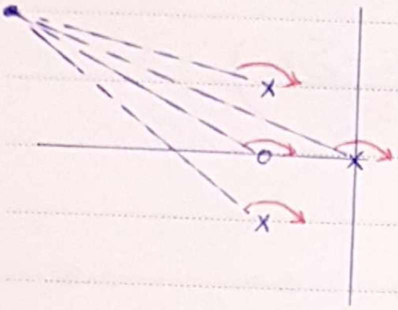
قطب های مزدوج مختلط تاثیری در شرط زاویه (روی محور حقیقی) ندارند.



PAPCO

Subject:
Date

قانون ششم: n-m شاخه‌ای که به سمت ∞ میل می‌کنند، مجانب بر خطوط راست با زاویه زیر هستند:



$$\phi_l = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad , \quad l = 0,1,2,\dots,n-m-1$$

در واقع در نقطه‌ای بسیار دور بروی مکان، همه صفرها و قطب ها با زاویه مساوی دیده می‌شود

$$\measuredangle G(s) = (2l+1)\pi$$

$$\underbrace{\phi_l + \phi_l + \dots + \phi_l}_{m \text{ بار}} - \underbrace{(\phi_l + \dots + \phi_l)}_{n \text{ بار}} = (2l+1)\pi$$

* مجانب ها:
  - تعداد مجانب ها (قانون سوم)
  - زاویه مجانب ها (قانون ششم)
  - محل تلاقی مجانب ها (قانون هفتم)

قانون هفتم: همه مجانب ها در نقطه زیر یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\text{قطب } i\text{ام}) - \sum_{j=1}^{m}(\text{صفر } j\text{ام})}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(-p_i) - \sum_{j=1}^{m}(-z_j)}{n-m}$$

اثبات:

$$1 + KG(s) = 1 + K\,\frac{s^m + \left(\sum_{j=1}^{m} z_j\right)s^{m-1} + \cdots}{s^n + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)s^{n-1} + \cdots}$$

$$\Rightarrow s^n + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)s^{n-1} + K\left(s^m + \left(\sum_{j=1}^{m} z_j\right)s^{m-1}\right) \simeq 0$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Date:

$$\Rightarrow -K \simeq \frac{s^n + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) s^{n-1}}{s^m + \left(\sum_{j=1}^{m} z_j\right) s^{m-1}} = s^{n-m}\left(1 + \frac{\sum p_i - \sum z_j}{s} + \cdots\right)$$

$$\simeq s^{n-m}\left(1 + \frac{\sum p_i - \sum z_j}{s}\right)$$

$$\Rightarrow (-K)^{\frac{1}{n-m}} \simeq s\left(1 + \frac{\sum p_i - \sum z_j}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$\simeq s\left(1 + \frac{\sum p_i - \sum z_j}{s(n-m)}\right) = s + \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m}$$

$$\Rightarrow s = K^{\frac{1}{n-m}} e^{j\frac{(2l+1)\pi}{n-m}} - \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m}$$

برای s های بزرگ، محل آن ها روی دایره ای با شعاع بسیار بزرگ است که مرکز آن روی محور حقیقی در محل $-\frac{1}{n-m}\left(\sum p_i - \sum z_j\right)$ است.

اگر به اشتباه، از تقریب ساده ی $1 + KG(s) \simeq 1 + K\frac{s^m}{s^n} = 0$ استفاده می کردیم، داشتیم،

$$(-k)^{\frac{1}{n-m}} = s \rightarrow s = e^{j\frac{(2l+1)\pi}{n-m}} \times k^{\frac{1}{n-m}} \quad (k>0)$$

که این یعنی s ها روی دایره ای با شعاع بسیار بزرگ و به مرکز مبدأ مختصات هستند که این نادرست است.

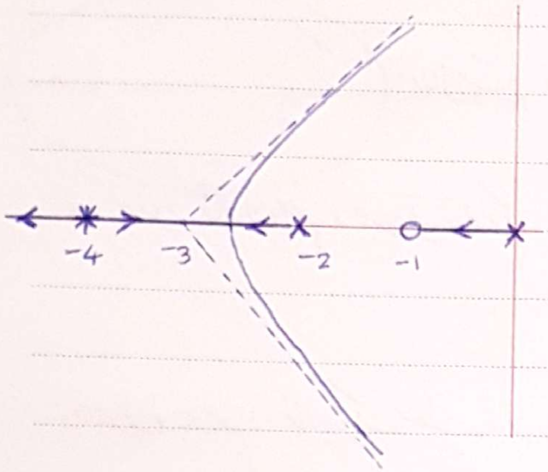
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

مثال

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+4)^2}$$



3 مجانب داریم:

$$\varphi_A = \begin{cases} \pi/3 \\ \pi \\ 5\pi/3 \end{cases}$$

محل تلاقی مجانب ها: $\sigma_A = \frac{-2-4-4+1}{3} = -3$

سوال
- قطب ها کجا بهم می رسند؟
- محل برخورد شاخه ها با محور موهومی کجاست؟

قانون هشتم: محل برخورد با محور موهومی را می توان از جدول R-H بدست آورد. (حل معادله کمکی)

باید K ای را پیدا کنیم که یک سطر از جدول R-H را صفر می کند.

قانون نهم: نقاط شکست (Break away points) نقاطی هستند که دو یا بیشتر از دو قطب در آن بهم می رسند.

مفهوم ریشه های مکرر →
$$\begin{cases} 1+KG(s)=0 \\ \frac{d}{ds}\left(1+KG(s)\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{ds}G(s)=0 \end{cases}$$

* در نقطه ی شکست، مماس های بر مکان، متقارن و دارای زوایای مساوی هستند.

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

دو قطب مجاور هم و بین آن دو جزء مکان → Break away point

دو صفر مجاور هم و بین آن دو جزء مکان → Break in point

مثال $G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$

$1+KG(s)=0$

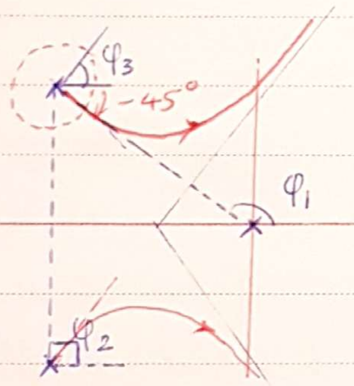
$s^2+s+k=0$

$2s+1=0 \rightarrow k=0.25$ ← ریشه‌های دیگر منطبق بر نقطه شکست

استدلال ب: برقرار است.

* برای قانون نهم، ضرورتی ندارد که Break away/in points روی محور حقیقی باشند

قانون دهم: زاویه ترک قطب و زاویه ورود به صفر با نوشتن شرط زاویه در ϵ همسایگی آن نقطه محاسبه می‌شود.

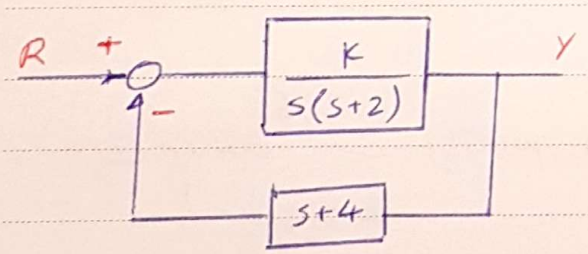


شرط زاویه: $-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3=(2l+1)\pi$

$-135°-90°-\varphi_3=-180$

$\varphi_3=-45°$

مثال مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته را برای $K>0$ رسم کنید.



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K}{s(s+2)}}{\frac{K(s+4)}{s(s+2)}+1}=\frac{K}{s^2+(2+K)s+4K}$$

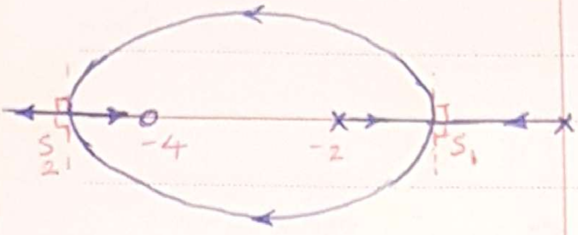
$$\rightarrow 1+K\cdot\frac{s+4}{s(s+2)}=0$$

$G(s)$

PAPCO

Subject:
Date:

$$G(s) = \frac{s+4}{s(s+2)}$$



- محل برخورد قطب های حقیقی:

$1 + k\,G(s) = 0$

$\frac{d}{ds} G(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 8s + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1.17 \\ s_2 = -6.86 \end{cases}$

شرط اندازه → $\begin{cases} K_1 = 0.34 \\ K_2 = 11.66 \end{cases}$

- محل برخورد با محور موهومی:

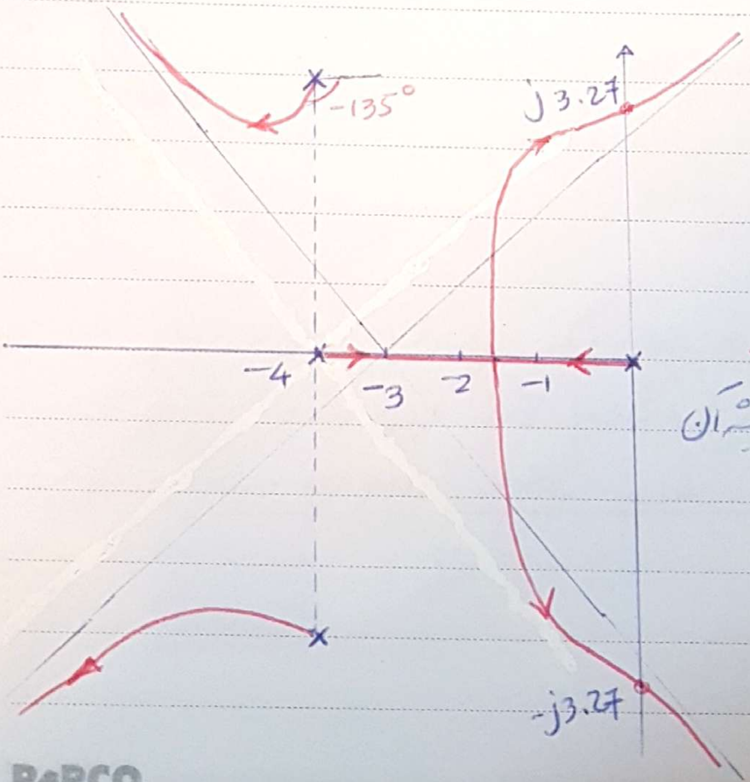
$s^2 + (2+k)s + 4k = 0$

s^2	1	4K
s^1	2+K	0
s^0	4K	

$\xrightarrow{K>0}$ برخورد با محور موهومی نداریم

مثال: $1 + K \frac{1}{s(s+4)(s^2+8s+32)} = 0$

قطب های حلقه باز: $s = 0, -4, -4 \pm j4$



$\sigma_A = \frac{0-4-4-4}{4} = -3$ → محل تلاقی مجانب ها

$\frac{d}{ds}(G(s)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}(s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K)$

$= 4s^3 + 36s^2 + 128s + 128 = 0$

$\rightarrow s^3 + 9s^2 + 32s + 32 = 0$

این عبارت یکنوا است ($\frac{d}{ds} > 0$) و ریشه آن حدوداً بین -1 و -2 است.

(ادامه محاسبات صفحه بعد)

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

- محل برخورد با محور موهومی:

s^4	1	64	K
s^3	12	128	
s^2	53.33	K	
s^1	$128-\frac{12K}{53.33}$	0	
s^0	K		

→ سطر تماما صفر : $K = 569$

→ معادله کمکی : $53.33\, s^2 + 569 = 0$

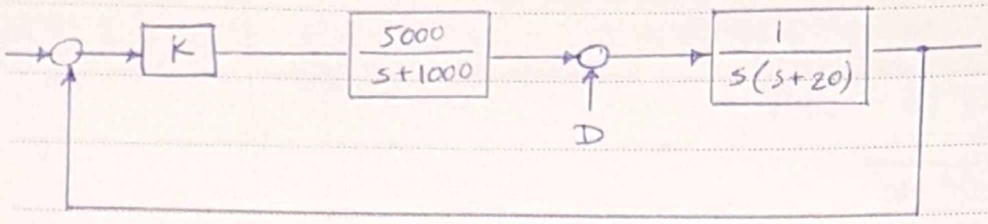
$\Rightarrow s = \pm j\, 3.27$

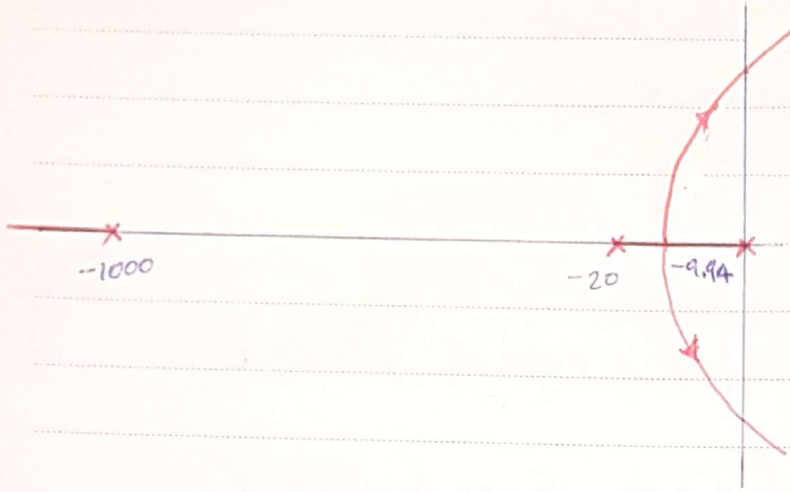
- زاویه خروج از قطب :

$-\phi - 135 - 90 - 90 = -180 \Rightarrow \phi = -135^\circ$

Scanned by CamScanner

مثال کنترل موقعیت موتور DC:





$$\phi_l = \frac{(2l+1)\pi}{3}$$

محل تلاقی مجانب‌ها : $\frac{-1000-20}{3} = \frac{-1020}{3}$

نقاط شکست : $\frac{d}{ds}\left(s^3 + 1020s^2 + 20000s\right) = 0$

$\Rightarrow 3s^2 + 1020s + 20000 = 0$

$\Rightarrow s \simeq -9.94$: قطب مکرر

s^3	1	20000
s^2	1020	5000K
s^1	a_1	
s^0	5000K	

$$a_1 = -5000K + \frac{1020 \times 20000}{1020} \rightarrow K = 4080$$

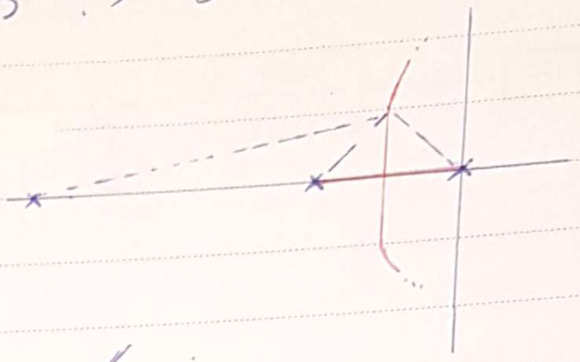
شرط پایداری : $0 < K < 4080$

* قطب $s=-1000$ باعث می‌شود که سیستم برای K های بزرگ ناپایدار شود، درحالی که اگر از این قطب صرف نظر می‌کردیم، (مانند مثال‌هایی که قبلا حل کرده بودیم)، شاخه‌ها کاملاً عمودی بودند و سیستم هیچ گاه ناپایدار نمی‌شد. مشاهده می‌شود که اضافه شدن قطب، شاخه‌ها را دفع کرده است. به شکل مت ب.
اضافه شدن صفر، شاخه‌ها را جذب می‌کند.

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

د) K مناسب برای بالازدگی متناظر با $\zeta=0.7$ چیست؟



شرط اندازه: $\dfrac{5000K}{|s|\,|s+20|\,|s+1000|}=1$

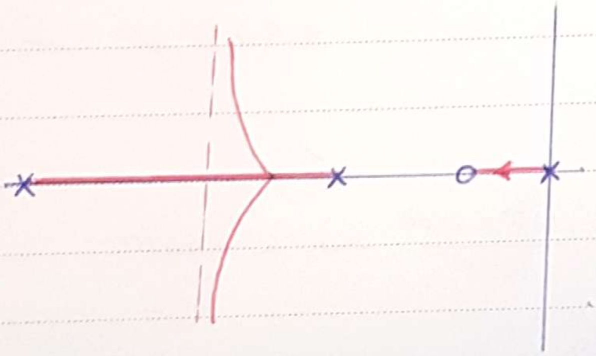
$$K \approx \frac{10\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}\times\sqrt{990^2+10^2}}{5000}$$

خطای ماندگار به ورودی پله: صفر

خطای ماندگار به ورودی شیب:

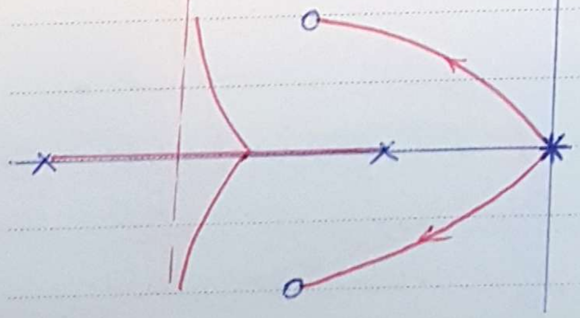
$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}=\frac{1000\times 20}{5000K}=\dots$$

□ برای داشتن پاسخ سریع‌تر باید یک صفر به کنترلر اضافه کنیم.



اگر K را بزرگ کنیم، صفر و قطب راست تقریباً یکدیگر را خنثی می‌کنند، ولی ω_n بسیار بالا خواهد بود → پهنای باند زیاد، حساسیت به نویز...

□ روش بهتر:



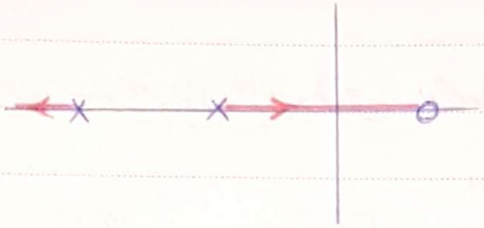
$$C(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$

PAPCO

Subject:

Date

○ مثال ساده: سیستم غیر مینیمم فاز



همواره به ازای K های بزرگ به ناپایداری می‌رسیم.

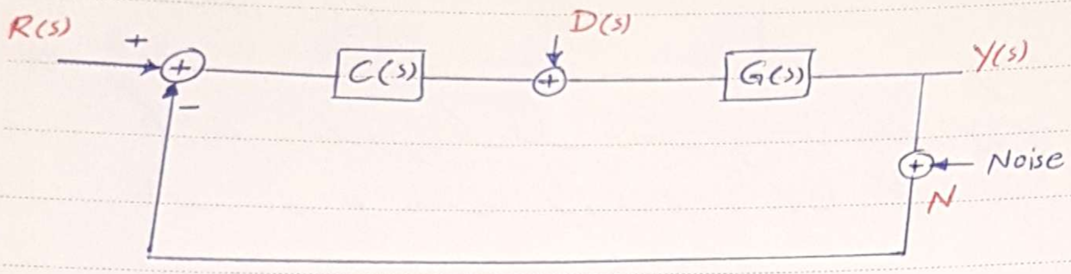
اگر بخواهیم با اضافه کردن یک قطب نزدیک این صفر مشکل را حل کنیم، وجود x←o در طرف راست محور $j\omega$ باعث می‌شود که همواره ناپایدار باشیم.

PAPCO

Subject:
Date:

پاسخ فرکانسی

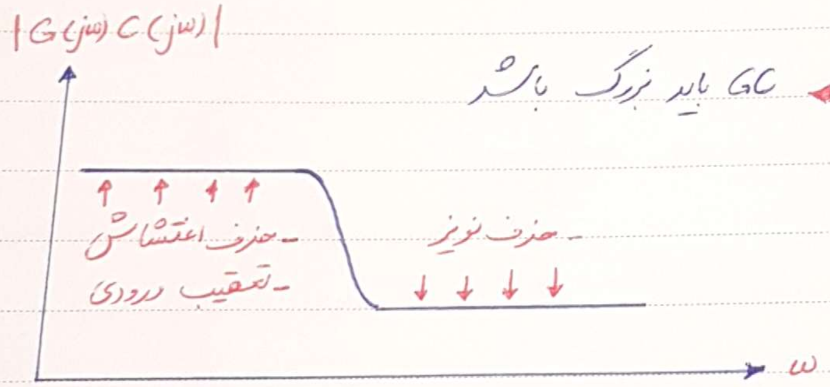
پاسخ فرکانسی یک ابزار بسیار مهم برای تحلیل و طراحی در حوزه سیستم ها خطی (و بعضاً سیستم های غیرخطی) است.

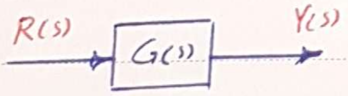


$$Y = \frac{-GC}{1+GC} N + \frac{GC}{1+GC} R + \frac{G}{1+GC} D$$

نویز در باند فرکانسی بالا ← GC باید کوچک باشد.

اغتشاش در باند فرکانسی پایین ← GC باید بزرگ باشد





فرض کنید سیستم $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ داده شده است که تمام قطب های $G(s)$ از نیم صفحه چپ هستند. ورودی های سینوسی $r(t) = A\sin(\omega t)$ را به سیستم اعمال کنید. پاسخ سیستم به ورودی $r(t)$ برابر است با:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \times \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s+p_n} + \frac{\alpha}{s+j\omega} + \frac{\beta}{s-j\omega}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\alpha = \lim_{s \to -j\omega} (s+j\omega)\, G(s)\, \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{-1}{2j} A\, G(-j\omega)$$

$$\beta = \lim_{s \to j\omega} (s-j\omega)\, G(s)\, \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{2j} A\, G(j\omega) = \bar{\alpha}$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\Phi(j\omega)}$$

$$\Phi(j\omega) = \measuredangle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))}$$

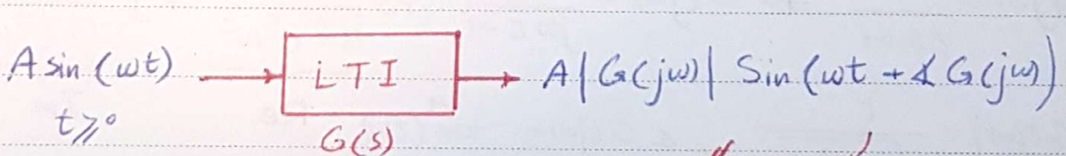
$$\begin{cases} \alpha = \frac{-1}{2j} A\, |G(j\omega)|\, e^{-j\Phi} \\ \beta = \frac{1}{2j} A\, |G(j\omega)|\, e^{j\Phi} \end{cases}$$

پاسخ ماندگار در حوزه زمان برابر است با:

$$y(t) = \alpha e^{-j\omega t} + \beta e^{j\omega t} = \frac{-A}{2j} |G(j\omega)|\, e^{-j(\omega t+\varphi)} + \frac{A}{2j} |G(j\omega)|\, e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$= \frac{A|G(j\omega)|}{2j} \left[e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)} \right]$$

$$= A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle G(j\omega))$$



پاسخ ماندگار

(بعد از میرا شدن قسمت های گذرا)

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

زوج تبدیل فوریه

$$\begin{cases} G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ g(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, dt \end{cases}$$

در واقع پاسخ به هر ورودی دلخواه از روی پاسخ فرکانسی قابل تعیین است:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)\, R(j\omega)$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(j\omega)\, G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

← لذا می‌توان با استفاده از پاسخ فرکانسی یک سیستم را به طور کامل شناسایی و تحلیل نمود.

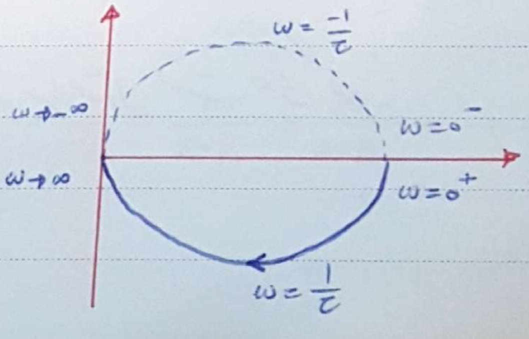
▲ طرق نمایش پاسخ فرکانسی:
۱- منحنی قطبی polar plot
۲- منحنی های Bode

۱- منحنی های قطبی: در این روش، $G(j\omega)$ در صفحه‌ی $Re\{G\}-Im\{G\}$ برای مقادیر مختلف ω از صفر تا ∞ ترسیم می‌شود.

$$G(s) = \frac{1}{\tau s+1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau+1} = \underbrace{\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{-\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}}_{Im}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)$
0^+	1	$-\epsilon$
∞	0	$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$



PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

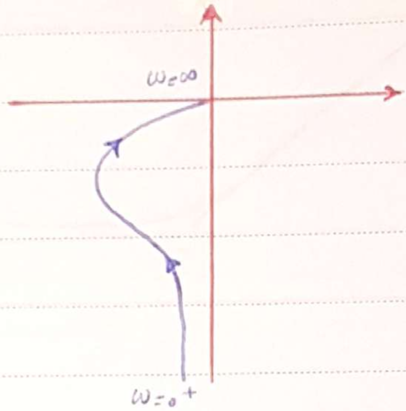
مثال ②

$$G(s) = \frac{k}{s(\tau s+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(j\omega\tau+1)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{|\omega|\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \quad , \quad \measuredangle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega) - \frac{\pi}{2}$$

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\measuredangle G(j\omega)$
0^+	∞	$-\frac{\pi}{2}-\epsilon$
$+\infty$	0	$-\pi$
$\frac{1}{\tau}$	$\frac{k\tau}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3\pi}{4}$



۲- منحنی های Bode :

منحنی $20\log|G(j\omega)|$ و $\measuredangle G(j\omega)$ برحسب ω لگاریتمی ترسیم می‌شود.

$$G(s) = \frac{1}{\tau s+1} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega+1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau\omega^2}} \quad , \quad \measuredangle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

$\tau\omega \ll 1 \rightarrow |G(j\omega)| \simeq 1 \Rightarrow 20\log|G(j\omega)| \simeq 0$

$\measuredangle G(j\omega) \simeq 0$

$\tau\omega \gg 1 \rightarrow |G(j\omega)| \simeq \frac{1}{\tau\omega} \Rightarrow 20\log|G(j\omega)| = -20\log\tau\omega$

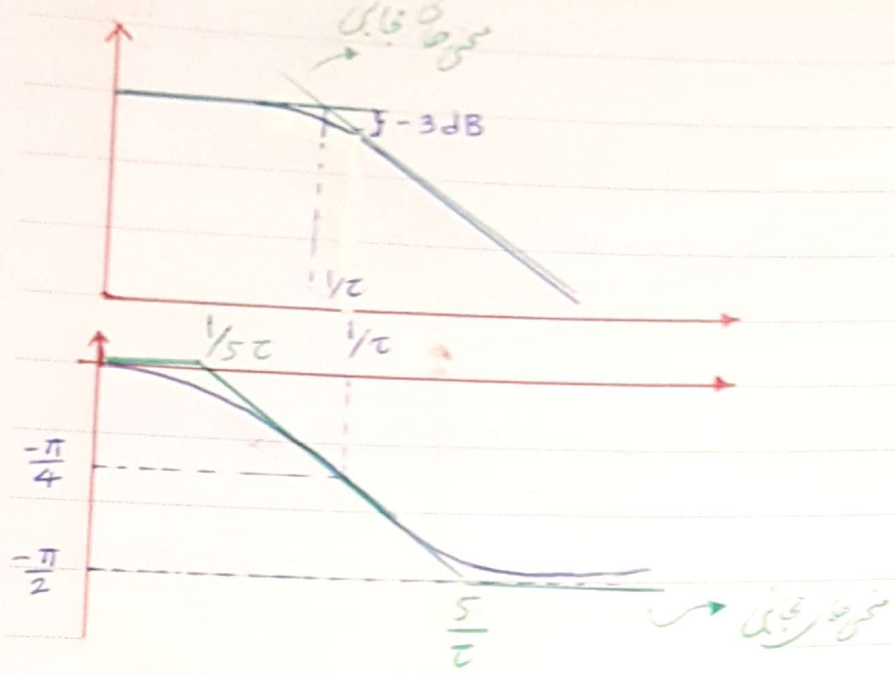
$\measuredangle G(j\omega) \simeq -\pi/2$

$\tau\omega = 1 \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.71$

$\measuredangle G(j\omega) = -\pi/4$ [$\omega = \frac{1}{\tau}$: (corner freq. : فرکانس گوشه‌ای)]

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

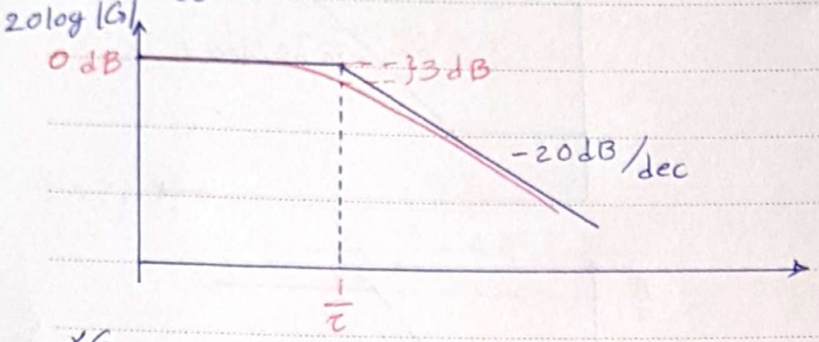


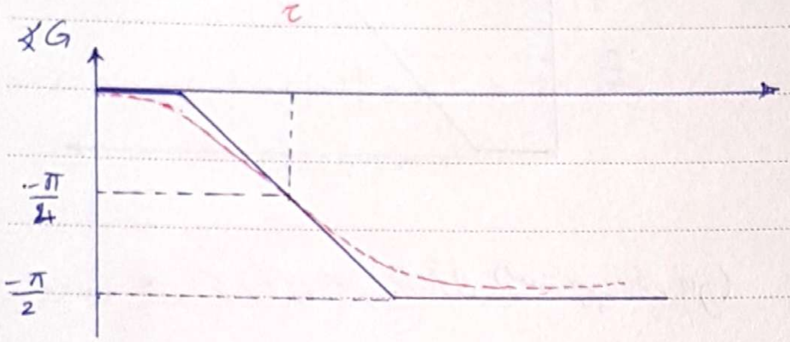
Subject:
Date

ترسیم منحنی های Bode در حالت کلی

یادآوری جلسه قبل:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$





در حالت کلی:

$$G(s) = \frac{K \prod_{l=1}^{m} (\tau_l s + 1)}{s^r \prod_{i=1}^{p} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{q} \left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1 \right]}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K + \sum_{l=1}^{m} 20 \log |j\tau_l \omega + 1| - 20 \log |(j\omega)^r|$$

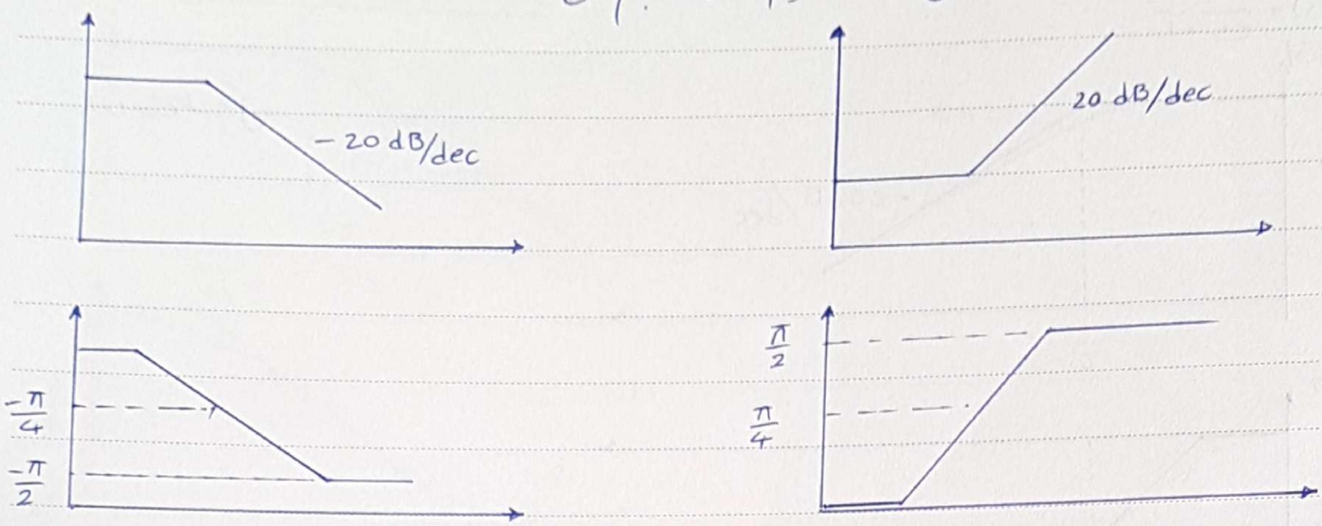
$$- \sum_{i=1}^{p} 20 \log |j\tau_i \omega + 1| - \sum_{k=1}^{q} 20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\xi_k \omega}{\omega_{nk}} \right|$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

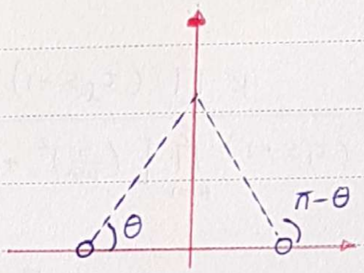
Subject:
Date

برای هر جمله در این عبارت، پاسخ فرکانسی ترسیم و نهایتاً با هم جمع می‌شود.



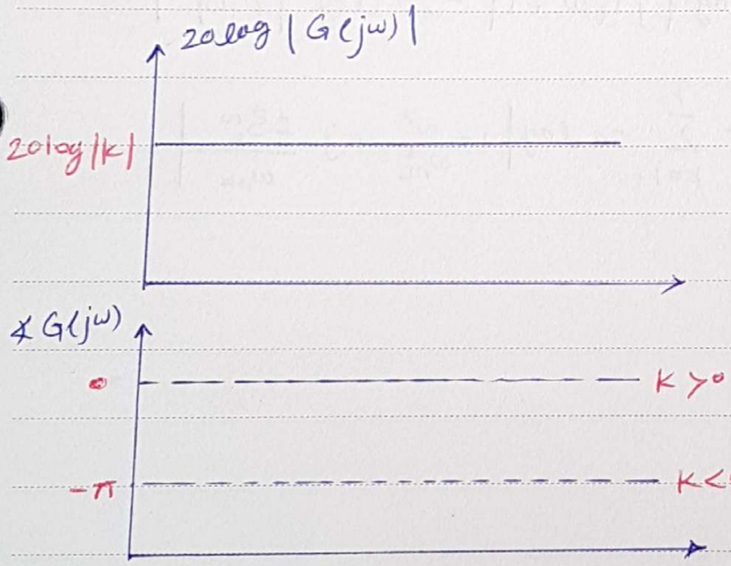
* پاسخ فرکانسی صفر مرتبه اول (سمت چپ محور jω)

* پاسخ فرکانسی قطب مرتبه اول



در هر دو حالت فوق، پاسخ برای صفر و قطب سمت چپ محور jω معتبر است و برای صفر یا قطب سمت راست، با توجه به نمودار روبرو، اندازه ثابت می‌ماند ولی فاز تغییر می‌کند.

* برای بهره K:



PAPCO

* برای قطب های زوج مختلط :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad , \quad \measuredangle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n}}$$

$$\omega \ll \omega_n \rightarrow |G(j\omega)| \simeq 1 \rightarrow 20\log|G(j\omega)| \simeq 0 \text{ dB}$$

$$\measuredangle G(j\omega) \simeq 0$$

$$\omega \gg \omega_n \rightarrow |G(j\omega)| \simeq \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \rightarrow 20\log|G(j\omega)| \simeq -40\log\frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \measuredangle G(j\omega) \simeq -\pi$$

$$\omega = \omega_n \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{2\xi} \quad , \quad \measuredangle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

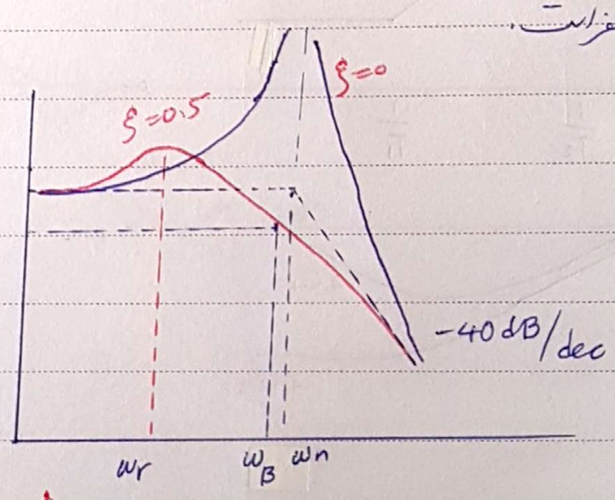
* تاثیر ξ در فرکانس های حوالی ω_n مشهود می شود.

$$\frac{d}{d\omega}|G(j\omega)| = 0 \rightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad , \quad 0<\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(برای $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$، مقدار ماکسیمم $|G|$ صفر است.)

ω_r: فرکانس تشدید (resonance freq.)

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$



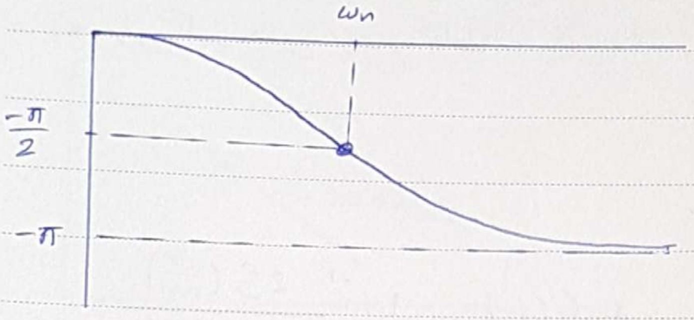
فرکانس ω_B (پهنای باند) فرکانسی است که منحنی به اندازه 3dB تنزل کرده است.

$$\omega_B = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

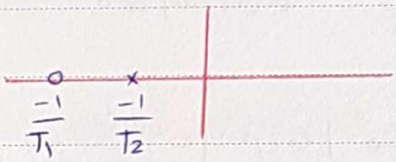
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

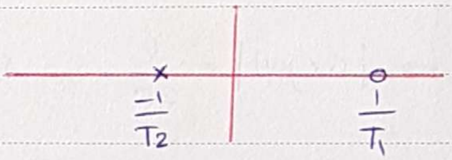


$$G_1(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{-T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \qquad T_1, T_2 > 0$$

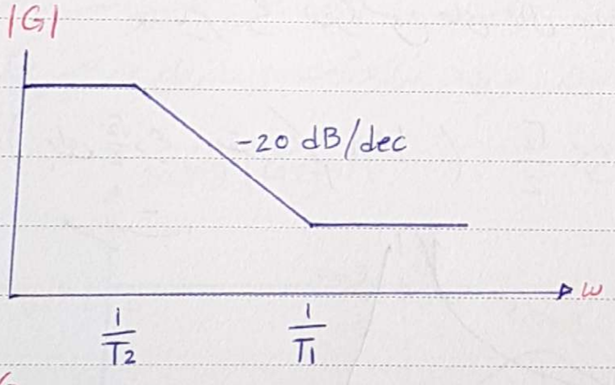


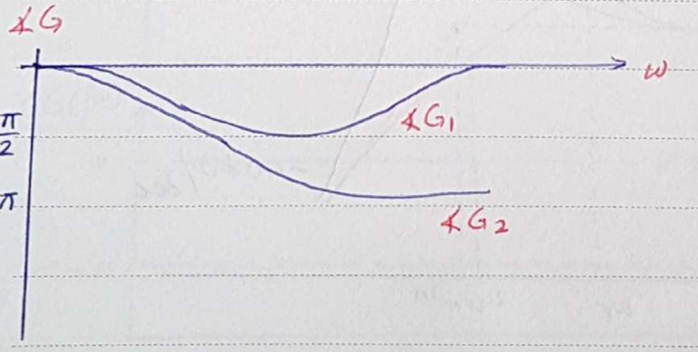
$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}$$

$$\measuredangle G_1(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)$$



$$\measuredangle G_2(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)$$





Subject:
Date

مثال ۱: نمودارهای Bode را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{2500(s+10)}{s(s+2)(s^2+30s+2500)}$$

$$= 5\,\frac{(1+\frac{s}{10})}{s(1+\frac{s}{2})(1+\frac{0.3}{25}s+\frac{s^2}{50^2})}$$

فرکانس های گوشه ای: $\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 10,\ \omega_4 = 50$

① $20 \log 5 \simeq 14\,dB$

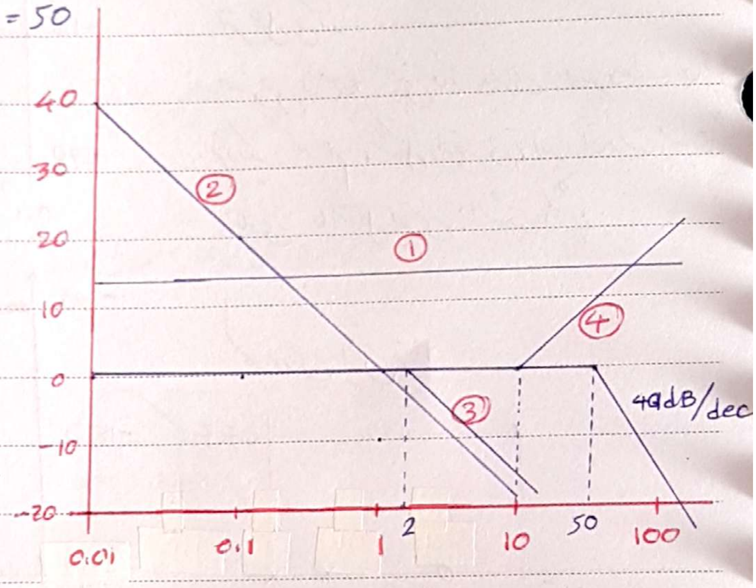
② $\frac{1}{s}$: $20\log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20\log\omega$

$-20\log(0.01) = 40\,dB$

③ $\frac{1}{1+s/2}$

④ $1+\frac{s}{10}$

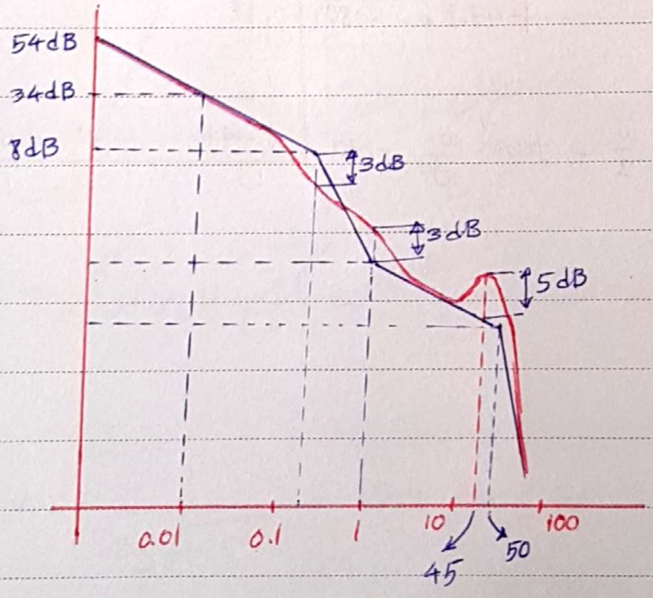
⑤ $\frac{1}{1+\frac{2\times0.3}{50}s+\frac{s^2}{50^2}}$



$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \simeq 45$

$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 1.74$

$20\log(1.74) = 5\,dB$

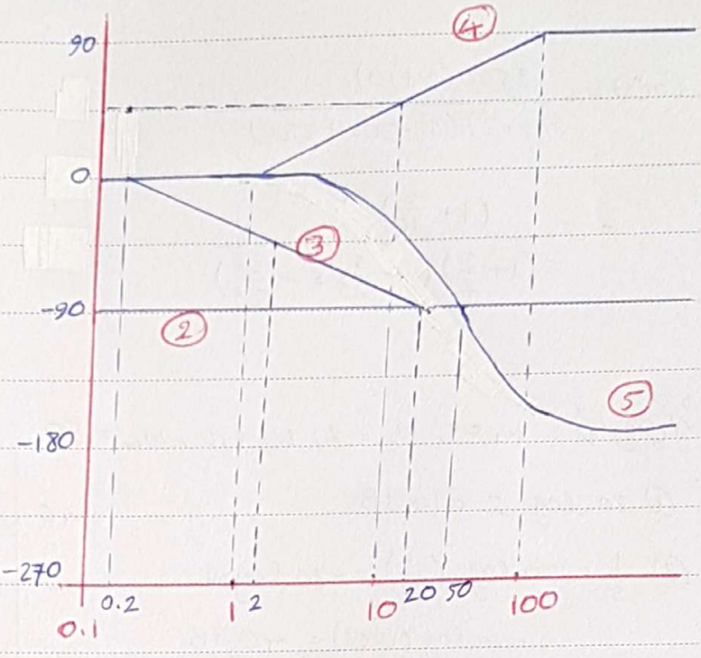


PAPCO

Scanned by CamScanner

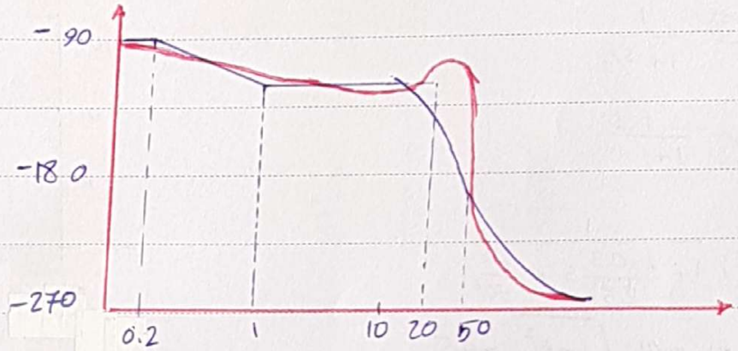
Subject:
Date

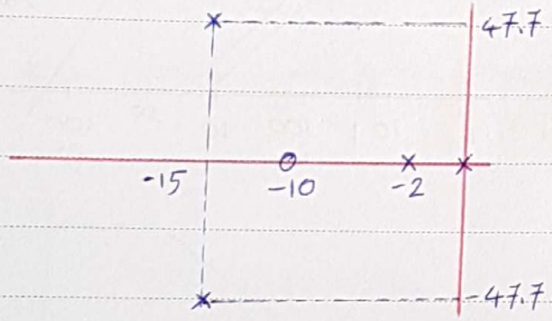
$$G(s) = \underset{①}{5}\,\frac{\overset{④}{\left(1+\frac{s}{10}\right)}}{\underset{②}{s}\,\underset{③}{\left(1+\frac{s}{2}\right)}\,\underset{⑤}{\left(1+2\times\frac{0.3}{50}s+\frac{s^2}{50^2}\right)}}$$



* هر چقدر محل صفر و قطب ها دورتر از هم باشد، تقریب های مورد استفاده در نمودار Bode بهتر عمل می کند. بخصوص در مورد منحنی فاز، برای صفر و قطب های نزدیک به هم، شکل واقعی می تواند تفاوت "نسبتاً" زیادی با شکل تقریبی داشته باشد.

برای دقیق تر





$$-47.7 = -50\sqrt{1-0.3^2}$$

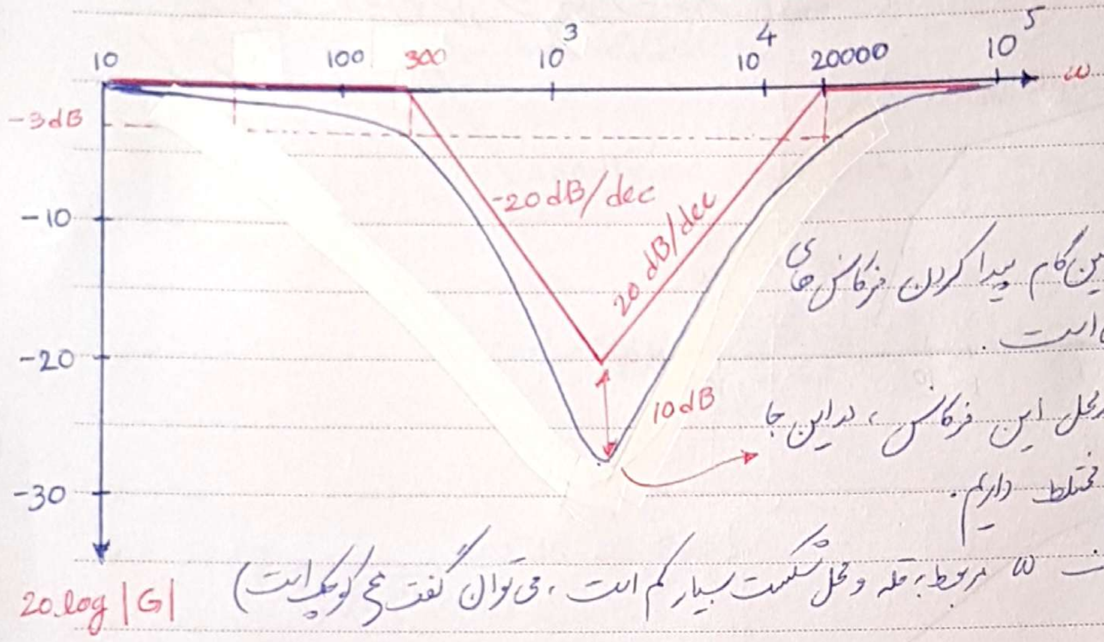
$$\phi(\omega) = -90 - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} + \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega-\omega_d}{15} - \tan^{-1}\frac{\omega+\omega_d}{15}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

- شناسایی تابع انتقال با استفاده از نمودارهای Bode :

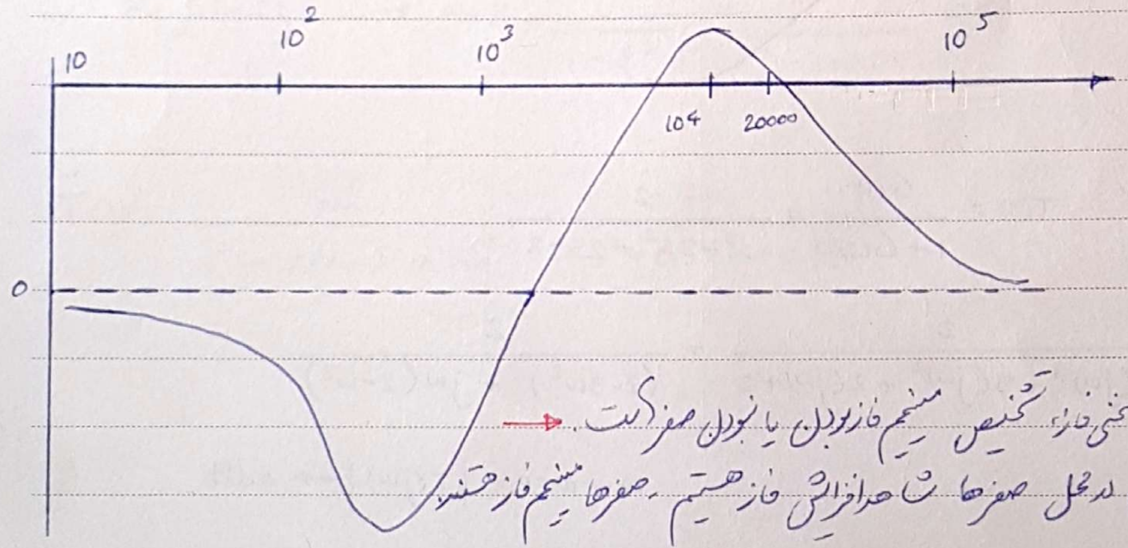
مثال



* همواره اولین گام پیدا کردن فرکانس های گوشه ای است.

به دلیل وجود قله در محل این فرکانس، در اینجا دو صفر زوج مختلط داریم.

(چون اختلاف ω مربوط به قله و محل شکست بسیار کم است، می توان گفت ξ کوچک است)



- تنها کاربرد منحنی فاز، تشخیص مینیمم فاز بودن یا نبودن صفر است. ←

چون در محل صفرها شاهد افزایش فاز هستیم، صفرها مینیمم فاز هستند.

* علت این که شیب مجانب ها را $20^{dB/dec}$ گرفتیم، آن بود که اگر $40^{dB/dec}$ می گرفتیم، منحنی را قطع می کرد.

$P_1 \simeq 300$

$P_2 \simeq 20{,}000$

$\omega_n \simeq 2450$

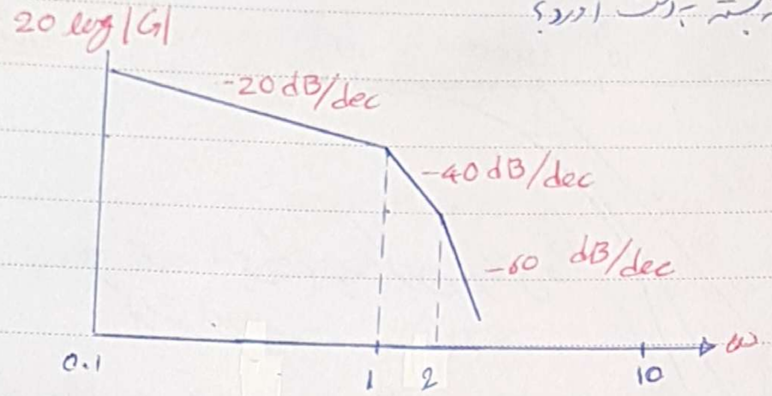
$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 10\,dB \Rightarrow \xi = 0.16$$

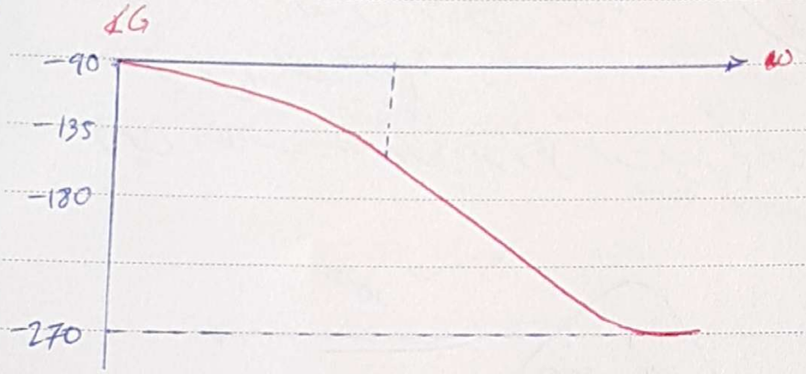
$$\Rightarrow G(s) = \frac{\left(\frac{s}{2450}\right)^2 + \frac{2\times 0.16}{2450}s + 1}{\left(\frac{s}{300}+1\right)\left(\frac{s}{20{,}000}+1\right)}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال: نمودارهای Bode حلقه باز و حلقه بسته را برای $G(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$ ترسیم کنید. آیا می‌توان یک تقریب درجه ۲ برای سیستم حلقه بسته بدست آورد؟





سیستم حلقه بسته: $T(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{2}{s^3+3s^2+2s+2}$

$$T(j\omega)=\frac{2}{(j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+2}=\frac{2}{(2-3\omega^2)+j\omega(2-\omega^2)}$$

$$\omega\to 0 \Rightarrow |T(j\omega)|\to 0\,dB$$

برای مدل کردن سیستم فوق با یک سیستم مرتبه ۲، باید به دنبال یافتن قله (قله) در نمودار اندازه باشیم:

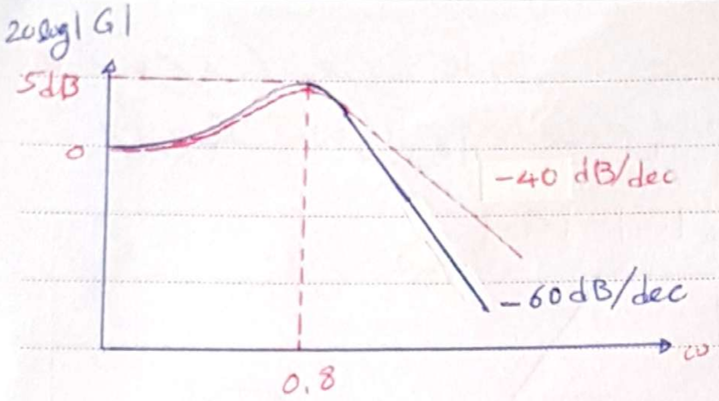
$$|T(j\omega)|=\frac{2}{\sqrt{(2-3\omega^2)^2+\omega^2(2-\omega^2)^2}}$$

یافتن ماکزیمم محلی $\Rightarrow$ $-6\omega(2-3\omega^2)+(2-3\omega^2)(2\omega-\omega^2)=0$

$$\Rightarrow (2-3\omega^2)(2\omega-6\omega^2-6\omega)=0 \Rightarrow \omega_r=\sqrt{\frac{2}{3}}\simeq 0.81$$

$$M_r=20\log|T(j\omega_r)|=5\,dB$$

Subject:
Date



تقریب درجه ۲ می‌تواند برای فرکانس‌های پایین و فرکانس‌های حول فرکانس تشدید مناسب باشد که عموماً همین فرکانس‌ها مدنظر ما هستند.

می‌دانیم برای فرکانس‌های بزرگ این تقریب چندان معتبر نیست.

تقریب مرتبه ۲:

$$M_r = 20 \log \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 5\,dB \rightarrow \xi = 0.3$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \rightarrow \omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{0.81}{\sqrt{1-2\times 0.09}} \simeq 0.88$$

$$\tilde{T}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.774}{s^2 + 0.51s + 0.774}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

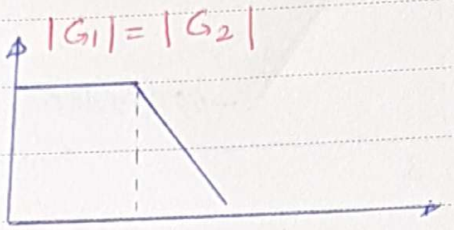
Subject:
Date

■ اثر تأخیر در نمودارهای Bode :

از آن جا که $|e^{-Ts}| = 1$ ، از روی منحنی اندازه نمی‌توان وجود تأخیر در تابع تبدیل سیستم را تشخیص داد.

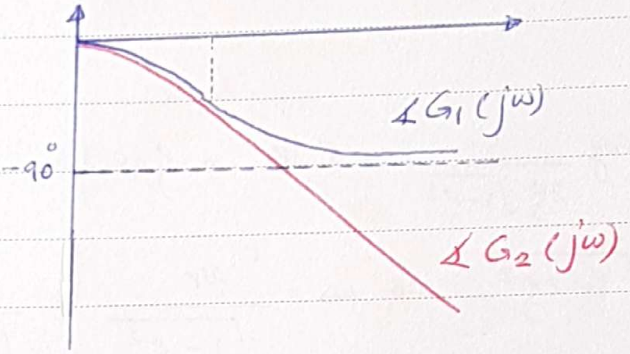
$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$

$G_2(s) = \frac{e^{-Ts}}{s+1}$



$\angle G_1(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$

$\angle G_2(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega) - T\omega$



■ روش های حوزه فرکانس
- منحنی قطبی : ← معیار پایداری نایکوئیست
- نمودارهای Bode : ← حد فاز و حد بهره

PAPCO

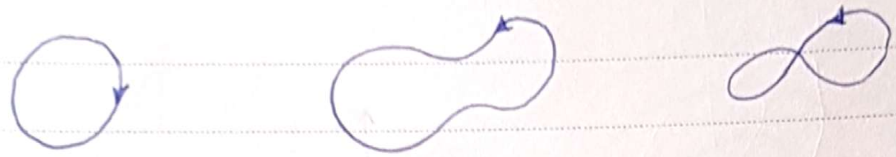
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

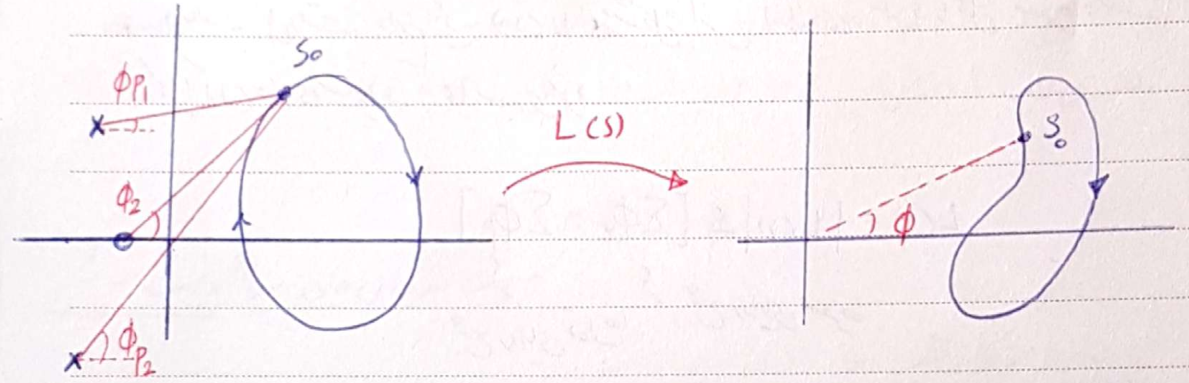
■ روش نایکوئیست

روشی برای بررسی پایداری سیستم حلقه بسته و خواص آن از روی منحنی های قطبی است.

* کانتورها (contour) منحنی هایی هستند که نقطه ابتدا و انتهای یکسان دارند.



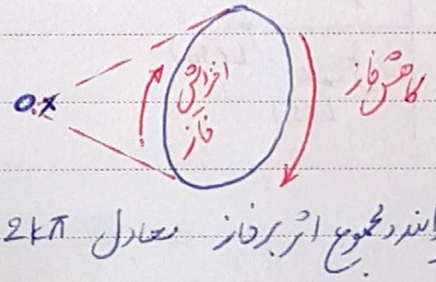
نخست تصویر منحنی بسته زیر در صفحه s به صفحه L(s) را درنظر بگیرید.



صفر و قطب های L(s)

$$L(s) = \frac{s+2}{(s+p_1)(s+p_2)} \Rightarrow L(s) = |L(s)| \angle \phi_2 - \phi_{p_1} - \phi_{p_2}$$

اگر صفر و قطب های L(s) درون منحنی اول نباشند، مجموع اثر آن ها بر فاز s های روی منحنی صفر است:



⇒ برآیند اثر فاز = ۰ ← در صفحه L(s)، منحنی مبدأ را دور نمی زند.

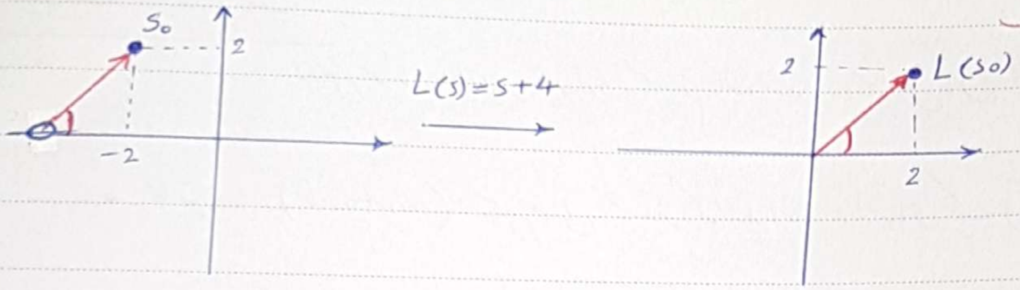
* از طرفی اگر صفر یا قطب داخل منحنی داشته باشیم، برآیند مجموع اثر بر فاز معادل $2k\pi$ است

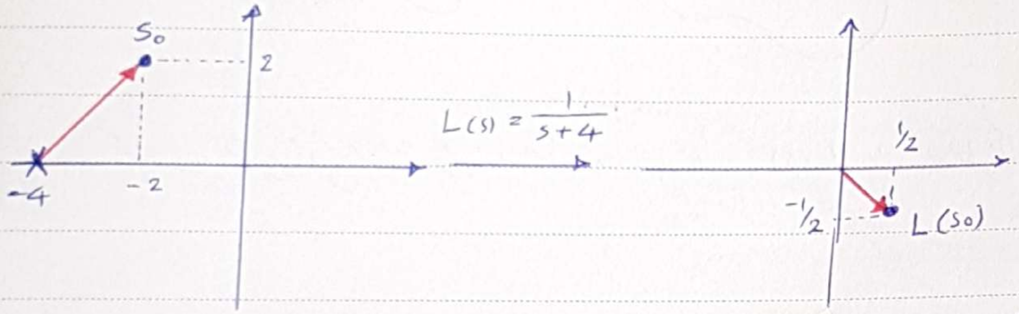
← در صفحه L(s)، منحنی مبدأ را دور می زند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

* مروری بر مفاهیم گذشته



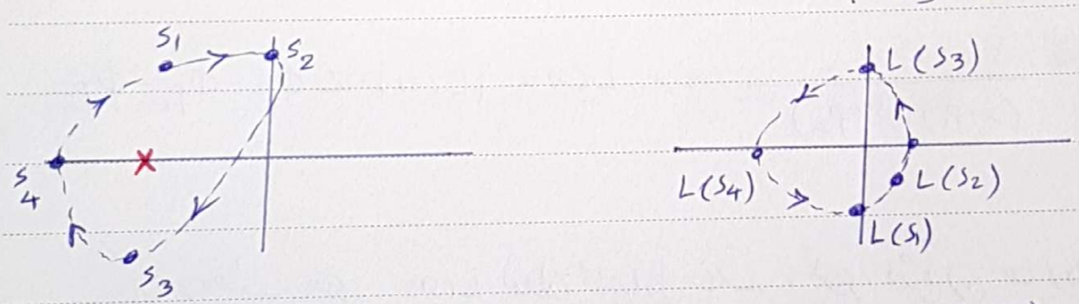


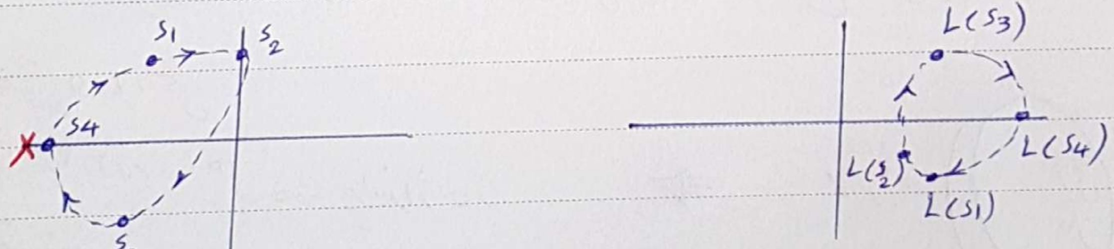
* در حالت کلی دقت داریم که $L(s_0)$، از روی اندازه‌ی فاصله‌ی s_0 تا محل صفرها و قطب‌ها و نیز زاویه‌ای که با آن‌ها می‌سازد، محاسبه می‌شود؛

$$L(s) = |L(s)| \measuredangle \left[\sum \phi_z - \sum \phi_p\right]$$

$\sum \phi_z$: جمع زوایای صفرها

$\sum \phi_p$: جمع زوایای قطب‌ها





PAPCO

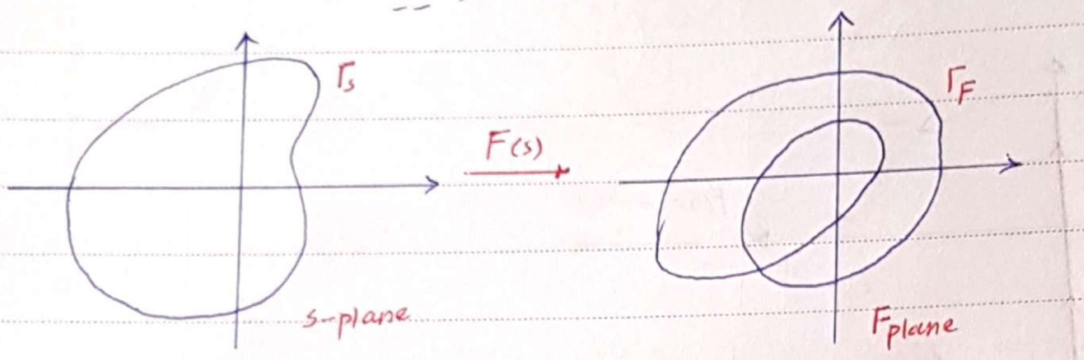
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

این روش نایکوئیست مبتنی بر تضیه cauchy یا اصل آرگومان است.

■ اصل آرگومان: فرض کنید تابع انتقال $F(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$ را داریم.

تصویر منحنی بسته $\Gamma(s)$ در صفحه s به صفحه F را در نظر بگیرید:



منحنی Γ_F مبدأ صفحه F را به تعداد صفرها منهای تعداد قطب های F، $(m-n)$ بار در جهت ساعتگرد دور می زند. (با فرض این که همه صفر و قطب ها داخل Γ_s باشند)

$$N = Z - P$$

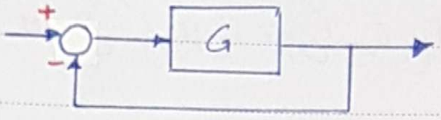
تعداد دور زدن های مبدأ در جهت ساعتگرد ←

* هیچ کدام از صفرها و قطب ها روی مرز نباید باشند.
* ضمناً صفرها و قطب های خارج Γ_s هم تأثیری ندارند.

PAPCO

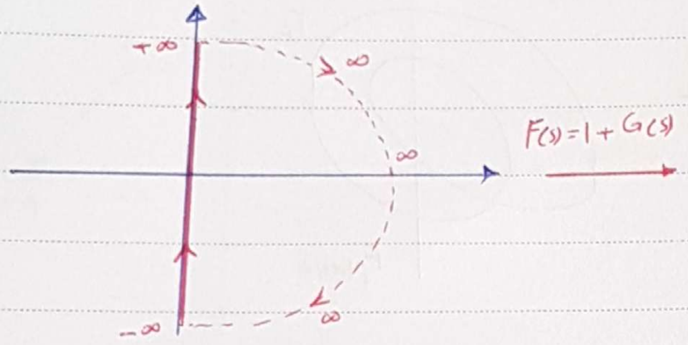
Subject:
Date

□ هدف: به دست آوردن تعداد قطب های حلقه بسته سمت راست (ناپایدار) با درنظر گرفتن پاسخ فرکانسی (منحنی قطبی) تابع تبدیل حلقه باز:



معادله مشخصه سیستم حلقه بسته، $1+G(s)=0$ است.

حال تصویر Γ_s را توسط $F(s)=1+G(s)$ درنظر می‌گیریم



مطابق اصل آرگومان داریم:

$$N = Z - P$$

N ← تعداد دوران Γ_F حول مبدأ صفر F

Z ← تعداد صفرهای F درون Γ_s ← تعداد قطب های ناپایدار حلقه بسته

P ← تعداد قطب های F درون Γ_s ← تعداد قطب های ناپایدار حلقه باز

$$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)} \Rightarrow 1+G(s)=\frac{a(s)+b(s)}{a(s)}$$

سیستم فیدبک نشان داده شده پایدار است، اگر و تنها اگر $Z=0$ یا معادلاً $N=-P$. به عبارتی تعداد دوران های Γ_G حول نقطه 1- در خلاف جهت عقربه های ساعت برابر تعداد قطب های ناپایدار G باشد.

نتیجه: اگر تابع تبدیل حلقه باز پایدار باشد، $(P=0)$، سیستم حلقه بسته پایدار است اگر و تنها اگر منحنی نایکوئیست نقطه 1- را دور نزند.

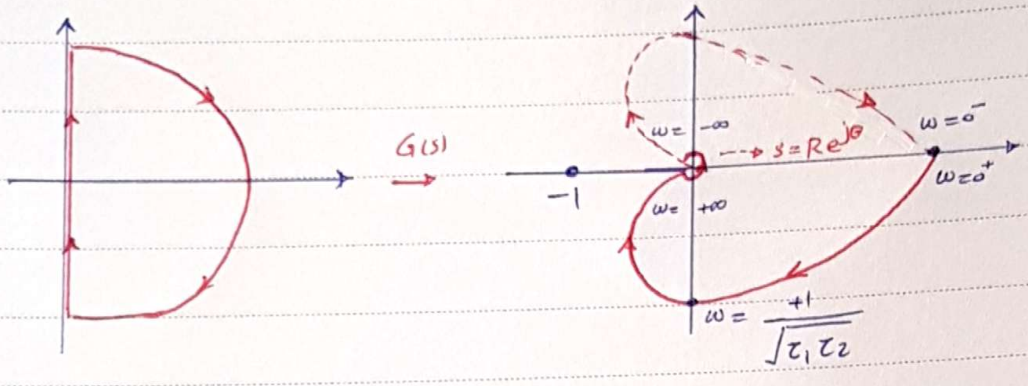
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

مثال

$$G(s)=\frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \quad , K,\tau_1,\tau_2>0$$



① Γ_1 : $s=j\omega \quad 0<\omega<\infty$

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\tau_1\omega+1)(j\tau_2\omega+1)}=K\frac{1-\omega^2\tau_1\tau_2}{(1+\omega^2\tau_1^2)(1+\omega^2\tau_2^2)}-jK\frac{\omega(\tau_1+\tau_2)}{(1+\omega^2\tau_1^2)(1+\omega^2\tau_2^2)}$$

ω	$Re\{G\}$	$Im\{G\}$
0^+	K	0
$\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$	0	$-K\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\tau_1+\tau_2}$
$+\infty$	0^-	0^-

* تصویر این ناحیه، قرینه تصویر ناحیه $s=j\omega$ ، $-\infty<\omega<0$ است. لذا نیازی نیست آن قسمت را مستقلاً محاسبه کنیم.

② تصویر نیم دایره: $s=Re^{j\theta} \quad \theta:-90^\circ\rightarrow 90^\circ \quad , R\rightarrow\infty$

$$G(s)=\frac{K}{(\tau_1 Re^{j\theta}+1)(\tau_2 Re^{j\theta}+1)} \; : \; G\rightarrow K\epsilon e^{-j2\theta}$$

($\epsilon \rightarrow 0$) → یک دایره کامل با شعاعی که به سمت صفر می‌رود.

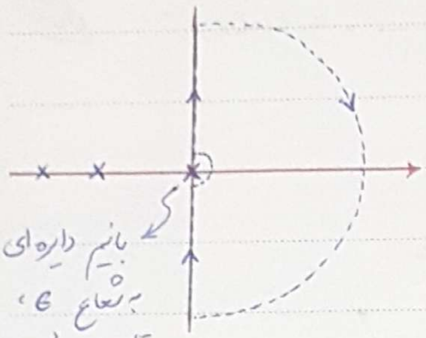
■ نقطه 1- دور زده نمی‌شود ← طبق معیار نایکوئیست سیستم حلقه بسته همیشه و برای هر $K>0$ ، $\tau_1,\tau_2>0$ پایدار است.

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject:
Date

مثال

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$



با نیم دایره‌ای به شعاع ϵ، قطب مبدأ را دور می‌زنیم.

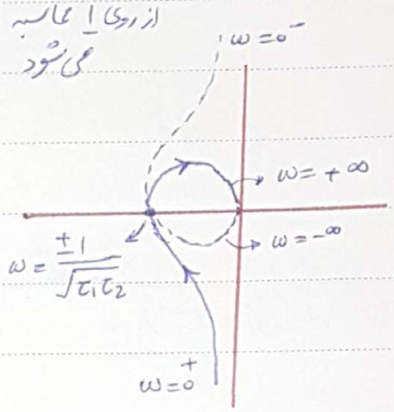
① $s = j\omega \ , \ \omega > 0$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1+1)(j\omega\tau_2+1)}$$

$$= \frac{-k(\tau_1+\tau_2)}{(1+\tau_1^2\omega^2)(1+\tau_2^2\omega^2)} - jk\frac{1-\omega^2\tau_1\tau_2}{\omega(1+\tau_1\omega_1^2)(1+\tau_2\omega_2^2)}$$

② $s = j\omega, \ \omega < 0 \rightarrow$ از روی ① محاسبه می‌شود

ω	$Re\{G\}$	$Im\{G\}$
0^+	$-k(\tau_1+\tau_2)$	$-\infty$
$\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$	$\frac{-k\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$	0
$+\infty$	0^-	0^+

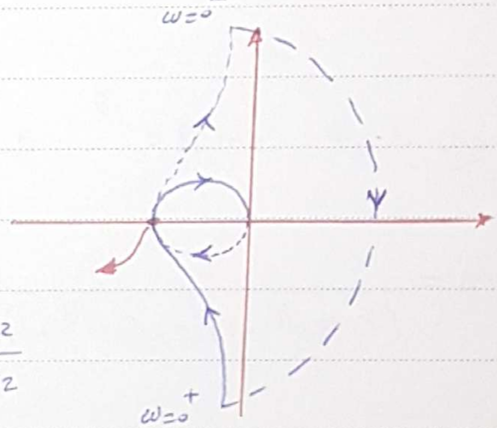


③ نیم دایره بزرگ $\rightarrow$ تصویر آن، تعدادی چرخش حول مبدأ و بی اثر خواهد بود

* تا زمانی که سیستم strictly proper است، همواره نیم دایره بزرگ روی مبدأ نگاشته می‌شود و بی اثر است.

④ نیم دایره کوچک : $s = \epsilon e^{j\theta} \Rightarrow G(s) = Re^{-j\theta}$

$\theta: -90° \rightarrow 90°$



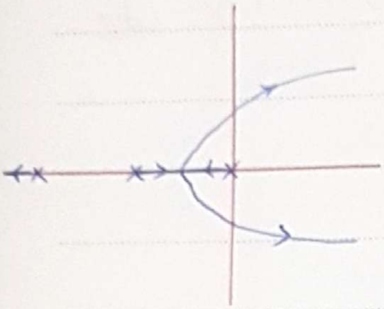
شرط پایداری: $\frac{-k\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2} > -1$ ⟵ $s = \frac{-k\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$

$$\Rightarrow k > \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

PAPCO

Subject:
Date

در این مثال، می توانستیم با روش root - locus نیز به جواب برسیم:

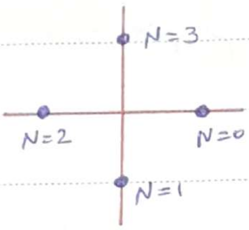


از مکان هندسی مشخص است که برای $K > K_0$ ، دو قطب ناپایدار داریم.
مقدار K_0 از روش نایکوئیست محاسبه شد.
همچنین دیدیم که در شرایط ناپایداری، دیاگرام نایکوئیست دو بار نقطه 1- را دور می زند و این یعنی دو قطب ناپایدار داریم.

■ نکاتی در مورد ترسیم دیاگرام نایکوئیست:

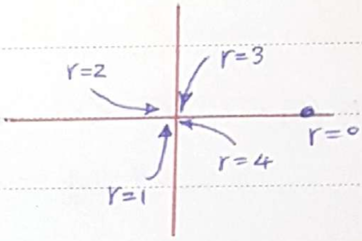
① $$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (z_i s+1)}{s^N \prod_{k=1}^{n} (T_k s+1)}$$

حوالی $\omega = 0^+$: $G(j\omega) \simeq \dfrac{K}{(j\omega)^N}$



② $$G(s) = K \frac{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \cdots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_0}$$

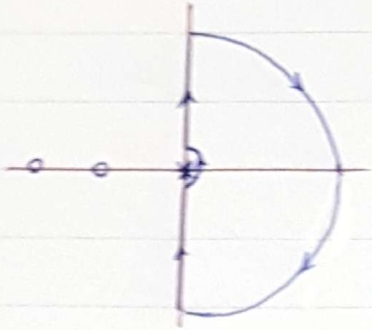
حوالی $\omega \to +\infty$: $G(j\omega) = \dfrac{K}{(j\omega)^{n-m}}$ ($n-m=r$: درجه نسبی سیستم)



PAPCO

Subject:
Date

مثال: $G(s) = K\dfrac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s^3}$ ، $K>0,\ T_1T_2>0$

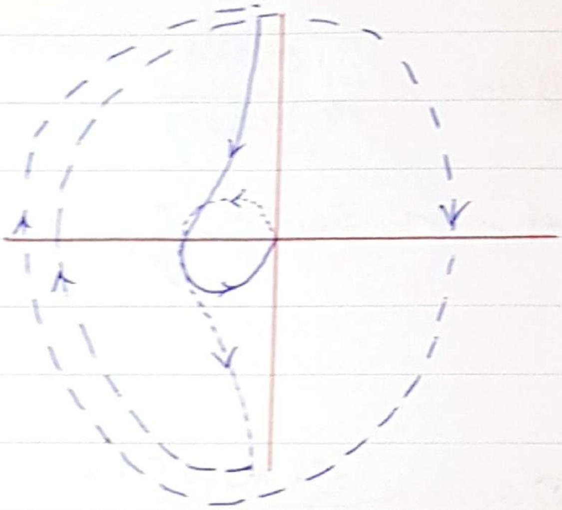


$$G(j\omega) = -K\frac{T_1+T_2}{\omega^2} + jK\frac{1-\omega^2 T_1T_2}{\omega^3}$$

به ازای $\omega \to 0^+$ از حوالی $90°$ شروع می‌شود $\leftarrow N=3$

فاز نهایی ، $-90°$ خواهد بود $\leftarrow r=n-m=1$

* تصویر نیم دایره کوچک : $s=\epsilon e^{j\theta}$ $\theta: -90° \to 90°$



$G(s) = Re^{-j3\theta} \to$ سه نیم دایره در جهت عکس نیم دایره کوچک

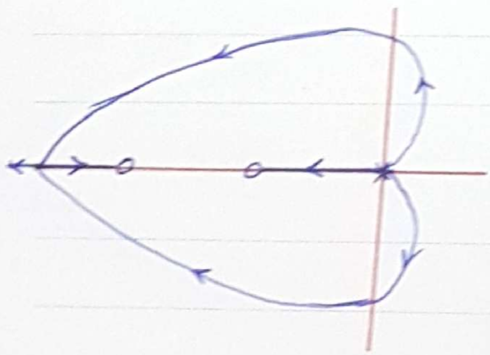
$\omega^* = \dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}} \to G(\omega^*) = -K(T_1+T_2)T_1T_2$

$-K(T_1+T_2)T_1T_2 < -1 \to$ نقطه -1 دور زده نمی‌شود

و حلقه بسته طبق معیار نایکوئیست پایدار است.

$\Rightarrow$ شرط پایداری : $K > \dfrac{1}{T_1T_2(T_1+T_2)}$

$-K(T_1+T_2)T_1T_2 > -1 \to$ حلقه بسته ناپایدار است



* دور زدن یا نزدن نقطه -1 روی دیاگرام را دقیق بررسی کنید.

* تناظر با مکان هندسی ریشه‌ها در نمودار مقابل نشان داده است.

* این مثال نشان می‌دهد که الزاماً ناپایداری به ازای K های کوچک حاصل نمی‌شود.

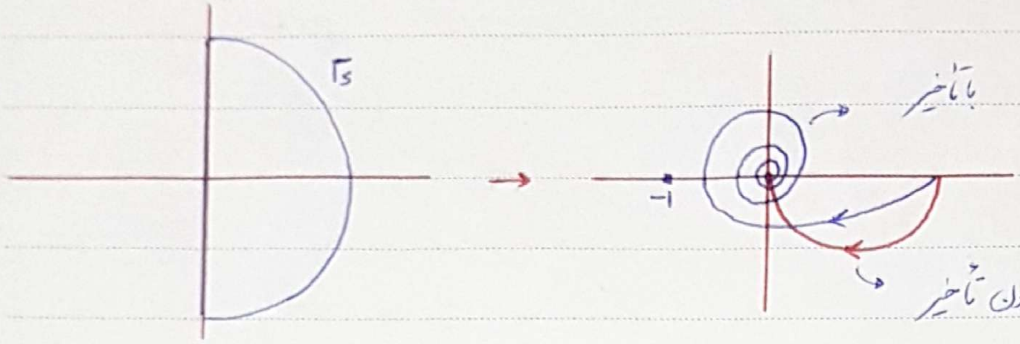
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

مثال

$$G(s)=\frac{ke^{-Ts}}{\tau s+1}$$



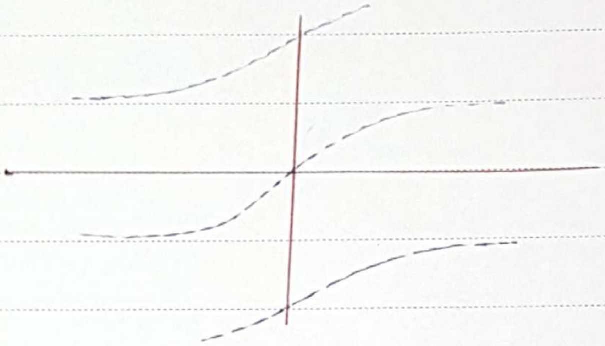
برای $T=0$، نقطه -1 هیچ گاه دور زده نمی‌شود و حلقه بسته همیشه پایدار است.

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega\tau}e^{-T\omega j}$$

نقطه‌ای که $\angle G(j\omega)=-180^\circ$ تعیین کننده پایداری است.

$$-T\omega-\tan^{-1}(\omega\tau)=-180^\circ$$

معادله بی‌شمار جواب دارد



تقریب زدن تاخیر در توابع تبدیل

$e^{-Ts}\simeq 1-Ts$ → اگر زمان تاخیر خیلی کوچک باشد، می‌توان از تقریب روبه‌رو استفاده کرد.

$$e^{-Ts}=1-Ts+\frac{(Ts)^2}{2!}-\frac{(Ts)^3}{3!}+\frac{(Ts)^4}{4!}-\dots$$

تقریب مرتبه اول: $\frac{b_0s+b_1}{a_0s+1}=b_1+(b_0-a_0b_1)s-a_0(b_0-a_0b_1)s^2+a_0^2(b_0-a_0b_1)s^3+\dots$

b_0s+b_1 | a_0s+1

$b_1a_0s+b_1$ | $b_1+\dots$

$(b_0-b_1a_0)s$

$$\left.\begin{aligned}&b_1=1\\&b_0-a_0b_1=-T\\&-a_0(b_0-a_0b_1)=\frac{T^2}{2!}\\&\vdots\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&b_0=\dots\\&b_1=\dots\\&a_0=\dots\\&\vdots\end{aligned}$$

PAPCO

* تقریب های تأخیر به شکل مذکور را تقریب Pade می‌نامند.

تقریب مرتبه اول : $e^{-Ts} = \frac{1-\frac{Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$

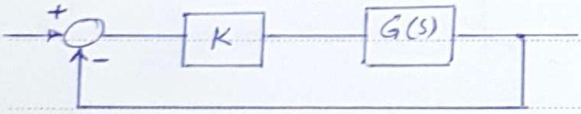
تقریب مرتبه دوم : $e^{-Ts} = \frac{1-\frac{Ts}{2}+\frac{(Ts)^2}{12}}{1+Ts+(Ts)^2}$

⋮

علاوه بر مزیت محاسباتی، این تقریب‌ها بیان می‌کنند که تأخیر مانند صفر سمت راست در سیستم مدل می‌شود. در مرتبه‌های بالاتر این تقریب، ممکن است صفر سمت چپ ایجاد بکند یا نکند، اما حتماً صفر سمت راست ایجاد خواهد کرد.

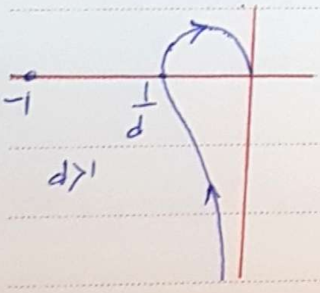
حاشیه های پایداری

سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید:



تا چه اندازه می‌توان K را تغییر داد تا پایداری حفظ شود؟

هر چقدر برای دامنه بیشتری از K سیستم پایدار بماند، می‌گوییم robust تر (مقاوم‌تر) است.



هر چقدر d بزرگ‌تر باشد، سیستم robust تر است.

لذا مقدار 20 log d را حاشیه بهره (حد بهره) می‌نامند. (Gain Margin)

□ مقدار $\frac{1}{d}$ همان اندازه G است، در فرکانسی که زاویه -180° شود.

$\frac{1}{d} = G(j\omega_c)$, $\angle G(j\omega_c) = -180^\circ$

ω_c : phase crossover frequency

GM : $-20\log(G(j\omega_c))$

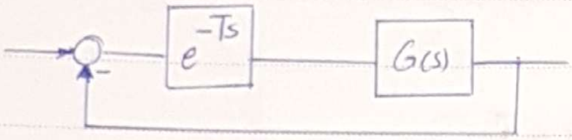
Scanned by CamScanner

Subject:
Date:

* به عبارت دقیق‌تر، حد بهره از طرف بالا، کوچکترین مقدار K $(K>1)$ است که برای آن، سیستم حلقه‌بسته، به مرز پایداری می‌رسد.

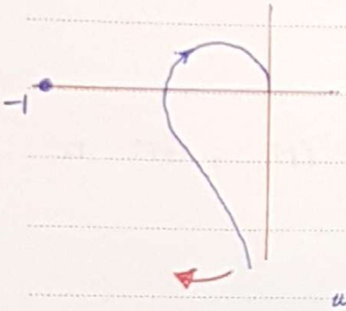
* مشابهاً حد بهره از طرف پایین، بزرگترین مقدار K $(K<1)$ است که برای آن، سیستم حلقه‌بسته به مرز پایداری می‌رسد.

□ برای تکمیل بحث فرض کنید:



افزایش تأخیر همیشه سیستم را به سمت ناپایداری می‌برد.

سوال این است که تا چه اندازه می‌توان به T اضافه کرد تا سیستم حلقه‌بسته پایدار بماند.



فرض کنید ω_g فرکانسی باشد که $|G(j\omega)| = 1$. حداکثر زاویه‌ای که منحنی قطبی می‌تواند بچرخد، برابر است با

$$\phi_{max} = 180 + \angle G(j\omega_g)$$

ω_g: Gain crossover frequency

اگر حداکثر تأخیر مورد سوال باشد، این مقدار برابر است با:

$$T_{max} = \frac{\phi_{max}}{\omega_g}$$

به عبارت دیگر، حد فاز کوچکترین مقدار ϕ است که برای آن سیستم حلقه‌بسته، به مرز پایداری می‌رسد.

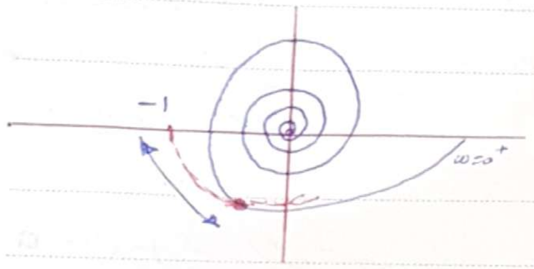
* مثبت و منفی حاشیه فاز فرقی نمی‌کند، چون یکی باعث تلاقی شاخه پایین منحنی قطبی با نقطه 1- می‌شود و دیگری باعث برخورد شاخه بالای آن با 1-.

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال حد فاز سیستم $G(s)$:

$$G(s) = \frac{2e^{-0.2s}}{s+1}$$



$$|G(j\omega)| = \left|\frac{2e^{-j0.2\omega}}{j\omega+1}\right| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

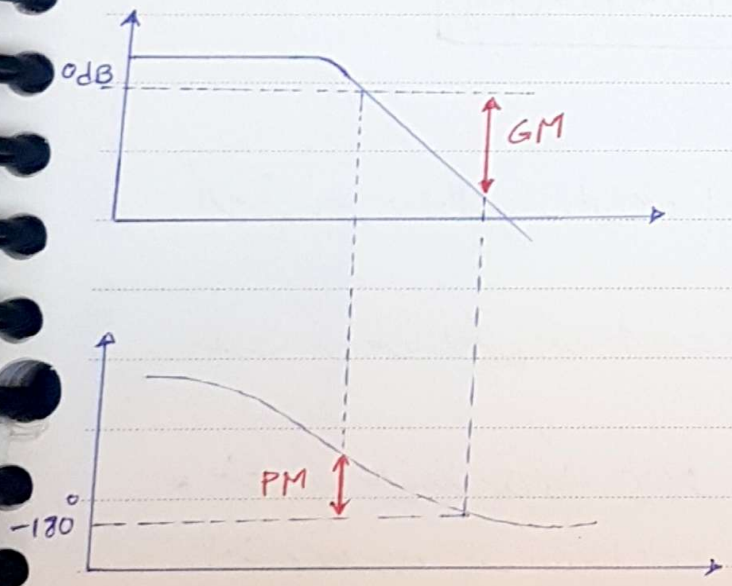
محاسبه ω_g:

$$\frac{2}{\sqrt{\omega_g^2+1}} = 1 \Rightarrow \omega_g = \sqrt{3}$$

$$\angle \frac{2e^{-0.2\omega_g j}}{j\omega_g+1} = -0.2\,\omega_g - \tan^{-1}\omega_g = -0.2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

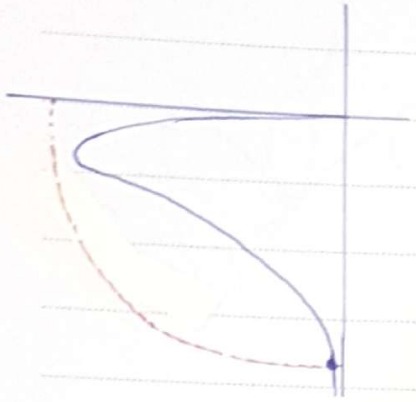
$$\phi_{max} = \pi - \frac{\pi}{3} - 0.2\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - 0.2\sqrt{3}$$

□ GM , PM از روی منحنی های Bode :



Subject:
Date

سؤال: آیا Gain Margin و Phase Margin زیاد لزوماً به معنای توام زیاد سیستم حلقه بسته در برابر نامعینی ها و پایداری بسیار خوب است؟



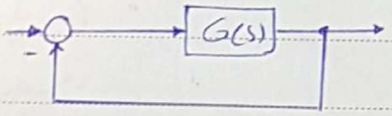
$GM = \infty$ بسیار خوب

$PM = 80^\circ$ بسیار خوب

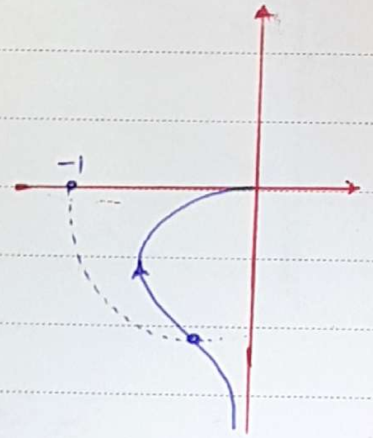
امّا با اندک تغییرات توام بهره دفاز به نقطه ۱- می‌رسیم و ناپایداری اتفاق می‌افتد.

مثال: GM و PM را محاسبه کنید:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$



$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\xi\omega_n)}$$



مشخصاً $GM=\infty$ (با افزایش بهره، نقطه ۱- هیچ گاه دور زده نخواهد شد)

$$|G(j\omega_g)| = 1 \rightarrow PM = 180 + \angle G(j\omega_g) = ?$$

$$|G(j\omega_g)| = 1 \rightarrow \frac{\omega_n^2}{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+4\xi^2\omega_n^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_n^4 = \omega_g^2(\omega_g^2+4\xi^2\omega_n^2) \Rightarrow \omega_g^4 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_g^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^4 + 4\xi\left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2 = \sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2$$

$$PM = 180 + \angle G(j\omega_g) = 180 + \left(-90 - \tan^{-1}\frac{\omega_g}{2\xi\omega_n}\right) = 90 - \tan^{-1}\left[\frac{1}{2\xi}\sqrt{(4\xi^4+1)^{1/2}+2\xi^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\xi}{\sqrt{(4\xi^4+1)^{1/2}-2\xi^2}} \simeq 100\xi$$

degree

این تقریب برای $\xi \le 0.7$ دقت خوبی دارد

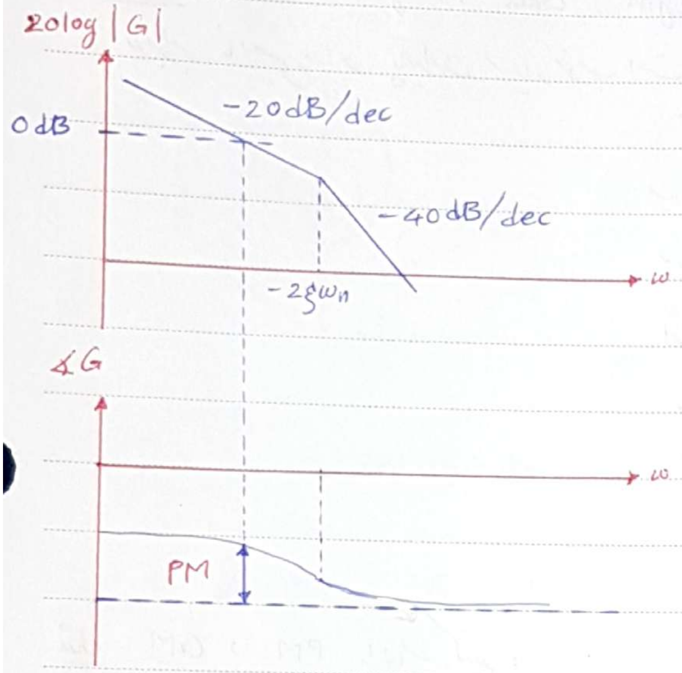
مثلاً: $\xi = 0.7 \rightarrow PM = 70^\circ$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

از نمودار Bode هم نتایج مشابه می‌گیریم:

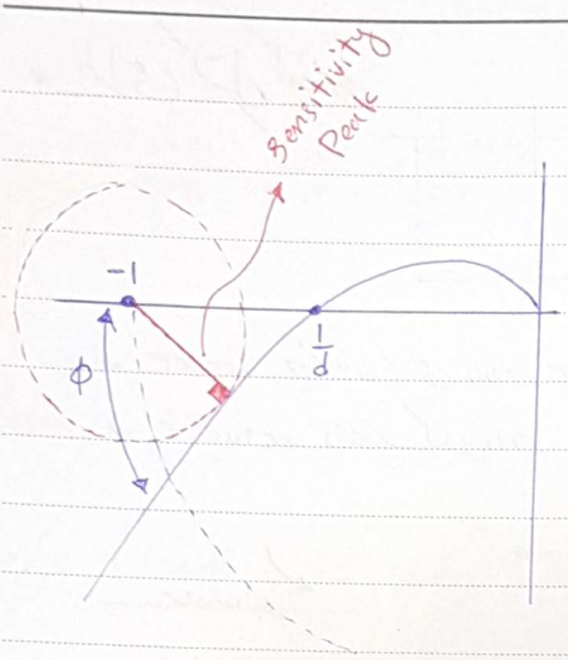


PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

■ پیک حساسیت "Sensitivity Peak"



$d = GM$

$\varphi = PM$

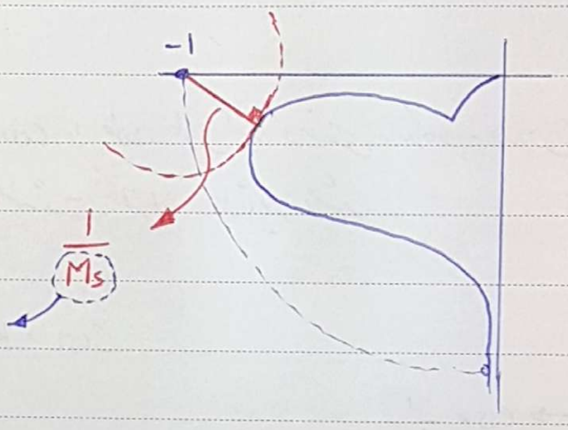
دیدیم که در مواردی، GM و PM، تنهایی درک درستی از "قوام" (robustness) سیستم در برابر تغییرات نمی‌دهد.

مثلا:

$$G(s) = \frac{0.38(s^2+0.1s+0.55)}{s(s+1)(s^2+0.06s+0.5)}$$

$GM = \infty \quad (\frac{1}{d} = 0)$

PM: بسیار بزرگ



Sensitivity Peak → حساسیت پایین مطلوب است.

■ فاصله هر نقطه منحنی تا -1 $= |G(j\omega)K(j\omega) + 1|$ (تابع تبدیل حلقه باز: $G(j\omega)K(j\omega)$)

↳ معیار مناسبی از قوام: $\min\limits_{\omega} \underbrace{|G(j\omega)K(j\omega)+1|}_{S(j\omega)}$

□ معمولاً M_s مناسب، کوچکتر از 2 یا 6dB است.

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)}$$

تابع حساسیت sensitivity function

$$M_s = \max_{0 \le \omega \le \infty} |S(j\omega)|$$

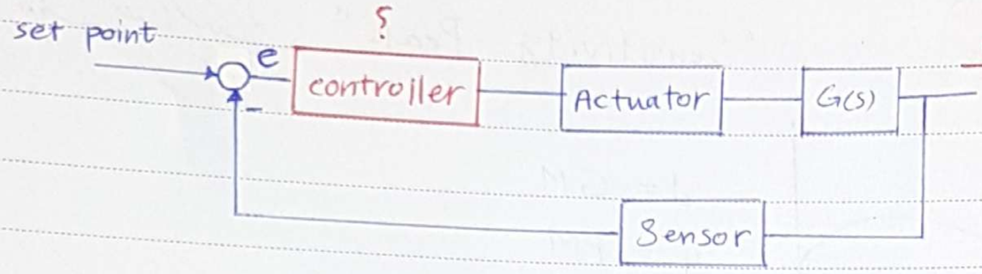
پیک حساسیت

↳ طبق تعریف حساسیت که ابتدای درس داشتیم، این عبارت دقیقاً حساسیت حلقه بسته به حلقه باز S^T_G است.

Scanned by CamScanner

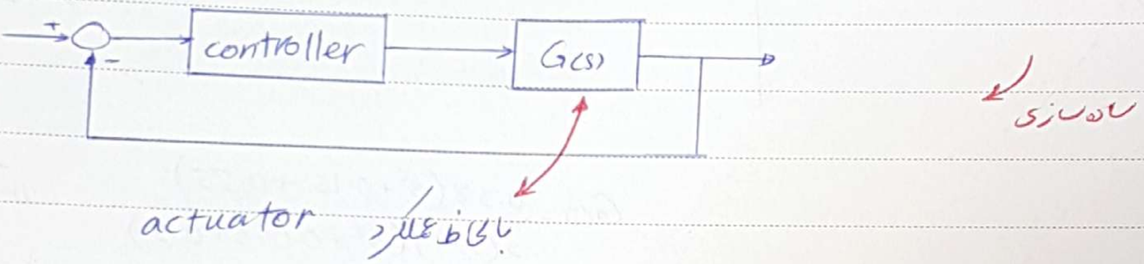
Subject
Date

* طراحی کنترل کننده



* sensor دینامیک سریعی دارد و معمولاً می‌توان از دینامیک آن صرف نظر کرد.

* actuator دینامیک کندی دارد و باید در نظر گرفته شود.



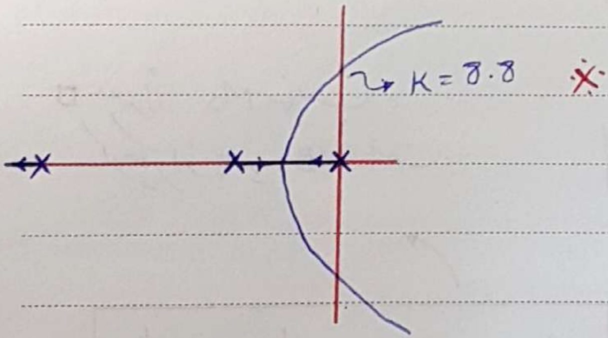
مثال: فرض کنید $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(\frac{1}{8}s+1)}$ ، $C(s)$ را طوری طراحی کنید که خطای ماندگار به ورودی شیب کمتر از ۱٪ و جهش پاسخ پله کمتر از ۱۵٪ و زمان نشست کمتر از ۲ ثانیه باشد.

• ابتدا با ساده‌ترین کنترل کننده شروع می‌کنیم: $C(s) = K$

$type = 1 \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

$e_{ss} \leq 0.01 \rightarrow K_v \geq 100$

$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)\,C(s) = K$ $\Rightarrow K \geq 100$



⇐ کنترل کننده استاتیک K، به اندازه کافی درجه آزادی در اختیار ما قرار نمی‌دهد.

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

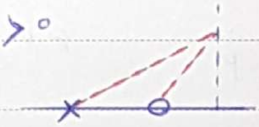
• فرم پیشنهادی کلی برای جبران ساز:

$$C(s) = K\,\frac{s+z_1}{s+p_1}\cdot\frac{s+z_2}{s+p_2}\cdots\frac{s+z_n}{s+p_n}$$

بحث را از حالت درجه ۱ شروع می کنیم

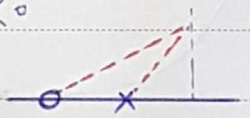
$$C(s) = K\,\frac{s+z}{s+p}\;,\quad K>0,\; z>0,\; p>0$$

اگر $z>p$:

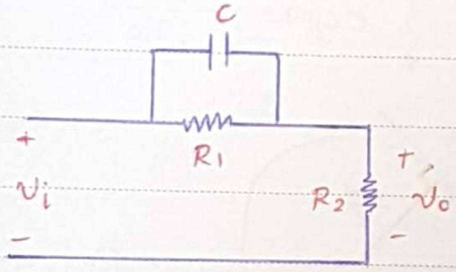


$\measuredangle C(j\omega)>0$ و به این کنترل کننده، پیش فاز (lead) می گوییم.

اگر $z<p$:



$\measuredangle C(j\omega)<0$ ، $C(s)$ کنترلر پس فاز (lag) خواهد بود.

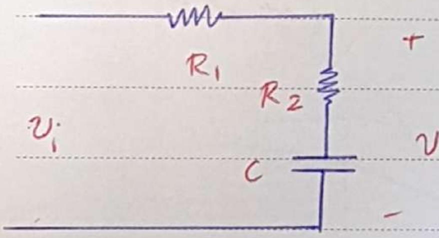


lead controller implementation

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1/Cs}{R_1+\frac{1}{Cs}}} = \frac{R_1Cs+1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs+1}\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$= \frac{1+\alpha Ts}{\alpha(1+Ts)}\;,\quad \alpha = 1+\frac{R_1}{R_2} > 1$$

$$T = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\,C$$



lag controler implementation

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}\;,\quad \alpha>1$$

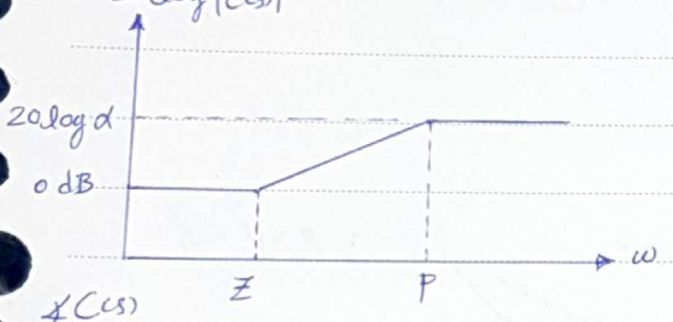
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

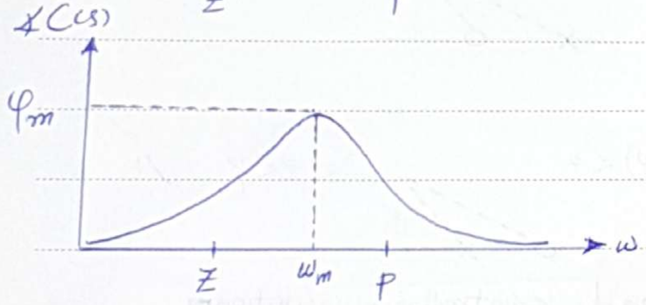
جبران کننده پیش فاز (lead)

$$C(s) = \frac{1+\alpha T s}{1+Ts}$$



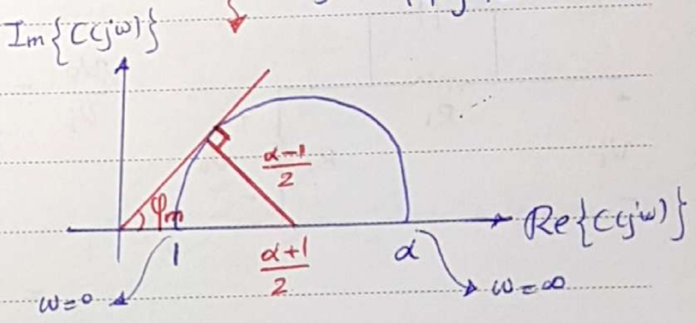
$$Z = \frac{1}{\alpha T}$$

$$P = \frac{1}{T}$$



برای بررسی و محاسبه‌ی φ_m، منحنی قطبی $C(j\omega)$ را رسم می‌کنیم.

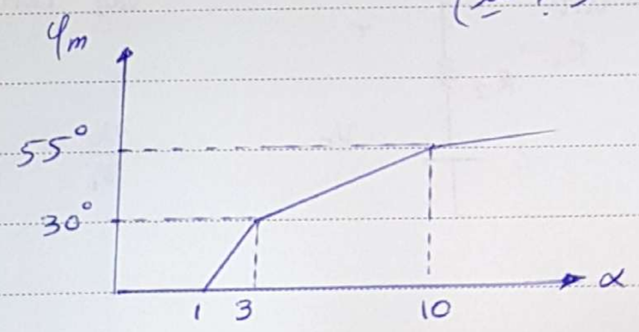
$$C(j\omega) = \frac{1+j\alpha T\omega}{1+jT\omega}$$



$$\sin\varphi_m = \frac{\frac{\alpha-1}{2}}{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

* در عمل، حداکثر φ_m در جبران کننده lead، در حدود $60^\circ - 70^\circ$ است. به دست آوردن φ_m بزرگتر از 70°، بسیار مشکل و با چالش‌های عملی همراه است. (به رفتار Z با تغییرات α توجه کنید)



PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

○ محاسبه‌ی فرکانس متناظر با φ_m:

$$\measuredangle C(j\omega) = \tan^{-1} \alpha\omega T - \tan^{-1} \omega T$$

$$\frac{d}{d\omega} \measuredangle C(j\omega) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha T}{1+\alpha^2\omega^2T^2} - \frac{T}{1+\omega^2T^2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \alpha T^2 \omega^2 = 1 + \alpha^2\omega^2T^2 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \sqrt{zp}$$

میانگین هندسی

در مقیاس لگاریتمی، تقریباً وسط z و p دیده می‌شود.

* اگر φ_m بزرگ‌تری نیاز بود، از دو جبران‌ساز lead متوالی استفاده می‌کنیم.

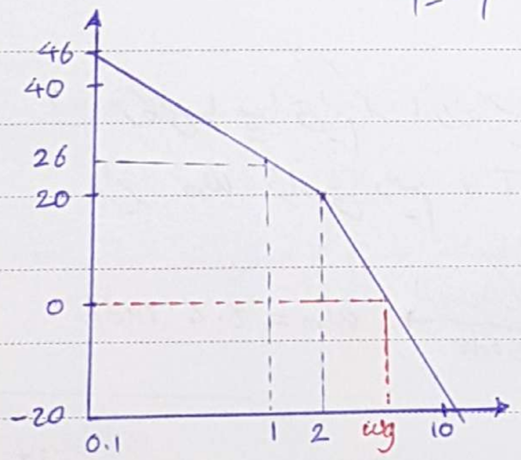
** مثال: در سیستم با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ می‌خواهیم کنترل‌کننده‌ای طراحی کنیم که خطای ماندگار به ورودی شیب کمتر از 5% و حداکثر جهش در پاسخ پله کمتر از 20% باشد.

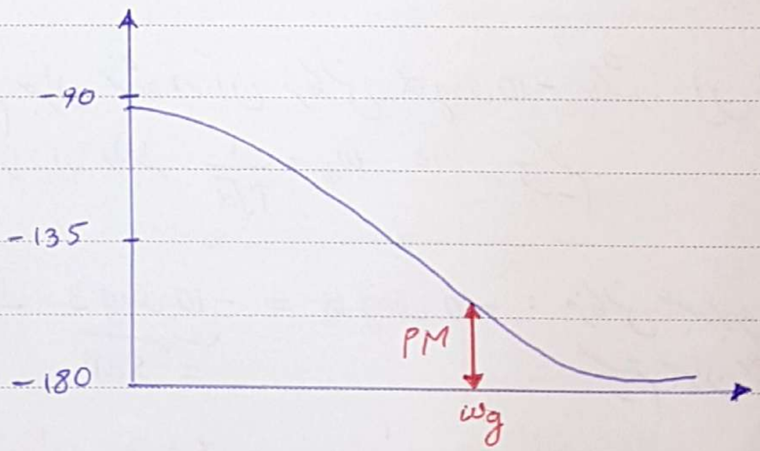
- مراحل طراحی:

۱- بهره سیستم را طوری انتخاب کنیم که خطای ماندگار مورد نظر تأمین شود. [خطای ماندگار به سایر پارامترهای سیستم بستگی ندارد و خوب است ابتدای کار، آن را بررسی کنیم.]

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sC(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{K}{2}} < 0.05 \Rightarrow K \geqslant 40$$

۲- برای K بدست آمده، از مرحله اول دیاگرام‌های بود را رسم می‌کنیم.





Scanned by CamScanner

Subject:
Date

۳- PM و GM سیستم جبران نشده $(KG(s))$ را بیابید و در صورتی که احتیاج به جبران کننده است، مراحل زیر را انجام دهید.

$\omega_g = 6.2 \ rad/s \rightarrow PM = 18^\circ$

$\omega_c = \infty \rightarrow GM = \infty \rightarrow$ سیستم به ازای $K=40$ پایدار است

$M_p \leq 0.2 \rightarrow \xi \geq 0.45$

$\xi \simeq 100 PM \rightarrow PM \geq 45^\circ$ → برای رسیدن به PM مطلوب، احتیاج به جبران کننده است. (پیش فاز lead)

۴- حداکثر فاز جبران کننده lead را به صورت تفاضل PM مطلوب و PM سیستم جبران نشده محاسبه، و بین 3° تا 7° به آن اضافه می‌کنیم.

$$\varphi_m = PM_{\text{مطلوب}} - PM_{\text{جبران نشده}} + \theta \rightarrow 3^\circ \leq \theta \leq 7^\circ$$

$$\varphi_m = 45^\circ - 18^\circ + 3^\circ = 30^\circ$$

۵- α را از رابطه‌ی $\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ محاسبه می‌کنیم.

$$\sin 30^\circ = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Rightarrow \alpha = 3$$

۶- فرکانسی را پیدا می‌کنیم که اندازه سیستم جبران نشده در آن فرکانس $-10 \log \alpha$ باشد. این فرکانس را برابر ω_m قرار می‌دهیم و T را از رابطه $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ محاسبه می‌کنیم.

فرکانس عبور بهره برای سیستم جبران نشده: $-10 \log \alpha = \underbrace{-10 \log 3}_{\simeq -5dB} \xrightarrow[\text{Bode}]{\text{از روی دیاگرام}} \omega_m = 8.4 \ rad/s$

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \rightarrow 8.4 = \frac{1}{T\sqrt{3}} \rightarrow T = 0.068 \rightarrow C(s) = 40 \frac{1 + \frac{s}{4.8}}{1 + \frac{s}{14.4}}$$

PAPCO

Subject:
Date

۷- PM سیستم جبران شده را حساب می‌کنیم و در صورتی که مقدار مطلوب نبود، با انتخاب φ_m بزرگ، مرحله ٤ به بعد را تکرار می‌کنیم.

$$\text{سیستم جبران شده} = 40 \times \frac{1+\frac{s}{4.8}}{1+\frac{s}{14.4}} \times \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\measuredangle C(j\omega)G(j\omega) = -90 + \tan^{-1}\frac{\omega_m}{4.8} - \tan^{-1}\frac{\omega_m}{14.4} - \tan^{-1}\frac{\omega_m}{2} = -136.6^\circ$$

$$PM_{\text{سیستم جبران شده}} = 180^\circ - 136.6^\circ = 43.4^\circ < 45^\circ$$

برای رفع این اشکال، θ را بزرگ‌تر می‌گیریم.

مثلاً با $\theta = 7^\circ$ داریم:

$$\varphi_{m\,\text{مورد نیاز}} = 45 - 18 + 7 = 34^\circ \rightarrow \alpha = 3.5$$

$$-10\log\alpha = 20\log|K\,G(j\omega)| \rightarrow \omega_m = 9\ rad/s$$

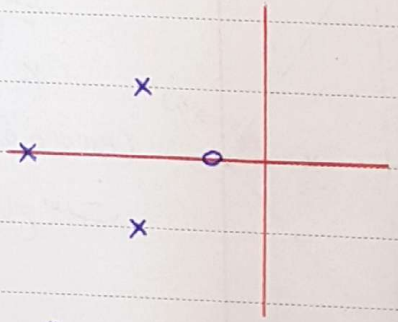
$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \rightarrow T = 0.059 \rightarrow C(s) = 40\,\frac{1+\frac{s}{4.84}}{1+\frac{s}{16.94}}$$

$$\measuredangle G(j\omega)C(j\omega) = -133.8^\circ \rightarrow PM_{\text{جبران شده}} = 180^\circ - 133.8^\circ = 46.2^\circ > 45^\circ$$ ✓

شبیه‌سازی سیستم حلقه بسته: $PO = 30\%$

صفر و قطب های حلقه بسته:

$$\begin{cases} P_{1,2} = -5.58 \pm j\,7.42 \\ P_3 = -7.79 \\ Z = -4.84 \end{cases}$$

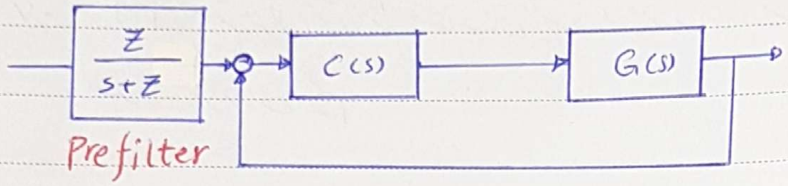


اگر PM را افزایش دهید، به ازای $PM = 55^\circ$ خواهیم داشت $PO \simeq 25\%$ ← اضافه کردن بیشتر PM کمک می‌کند.

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date



$Z = 4.84$

اگر بتوان صفر را از سیستم حذف کرد، پاسخ ها بهبود می یابد.

در این مثال اگر از پیش فیلتر استفاده کنیم خواهیم داشت: $PO = 3.5\ \%$

(با همان مقدار $PM = 55°$)

☐ طراحی lead: روش مکان هندسی قطب ها

** مثال: سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ را با مطلوبات زیر جبران سازی کنید.

$T_s \leq 1s$

$M_p \leq 20\ \%$

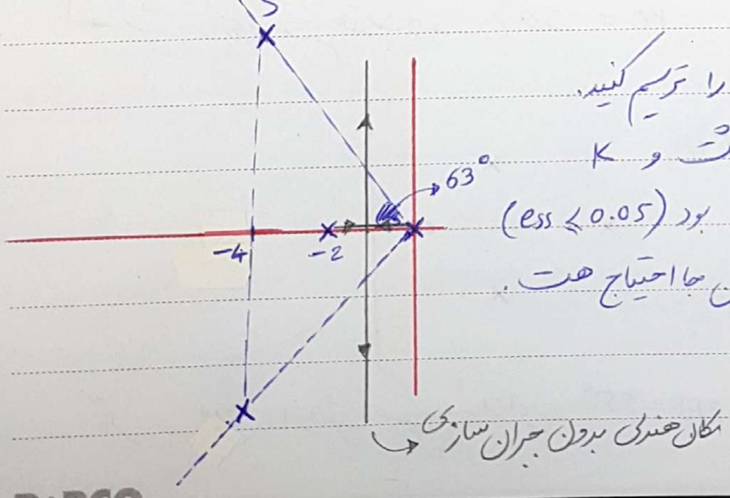
$e_{ss} \leq 0.05$

مراحل طراحی:

۱- محل قطب های مسلط سیستم را تعیین کنید، طوری که خواسته های مسئله را تامین کند.

$M_p \leq 20\% \rightarrow \xi \geq 0.45 \rightarrow \cos\theta = 0.45 \rightarrow \theta \simeq 63°$

$T_s \leq 1s \rightarrow \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 1 \rightarrow \xi\omega_n \geq 4$



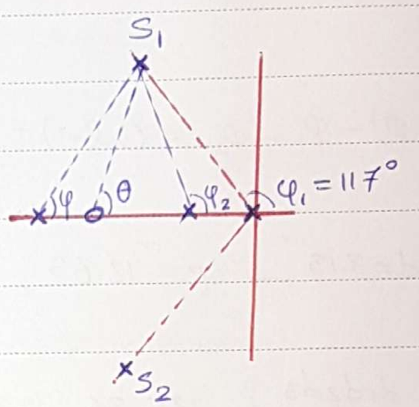
۲- مکان هندسی قطب های سیستم جبران شده را ترسیم کنید.
اگر مکان هندسی از مکان ریشه ها می گذشت و K مقدار بدست آمده از مطلوبات مسئله بود ($e_{ss} \leq 0.05$) احتیاج به جبران کننده نیست؛ ولی در این جا احتیاج هست.

PAPCO

Scanned by CamScanner

۳- شرط زاویه را برای نقطه مورد نظر (محل قطب مسلط) می‌نویسیم و تفاضل زاویه صفر و قطب جبران کننده را حساب می‌کنیم.

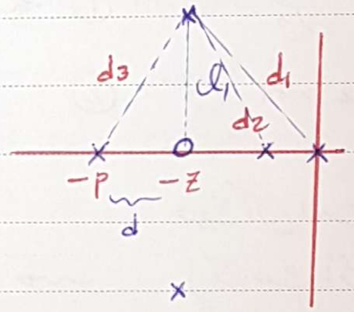
$\theta - \varphi =$ (زاویه صفر جبران کننده) - (زاویه قطب جبران کننده)



$$\theta - \phi - \varphi_1 - \varphi_2 = (2l+1)\pi$$

$$\theta - \varphi - 117^\circ - 104^\circ = -180^\circ \rightarrow \theta - \varphi = 41^\circ$$

٤ انتخاب صفر و قطب جبران کننده برای برآوردن $\theta - \varphi = 41^\circ$ اختیاری است. یکی از راحت‌ترین حالات این است که صفر جبران ساز را درست زیر نقطه s_1 بگیریم.



$$\theta = 90^\circ \rightarrow \phi = 49^\circ$$

$$\tan \phi = \frac{l_1}{d} \rightarrow d = 6.65 \Rightarrow P = 4 + 6.65 = 10.65$$

$$\begin{cases} Z = 4 \\ P = 10.65 \end{cases}$$

۵ بهره جبران کننده از روی شرط اندازه محاسبه می‌شود:

$$C(s) = K \frac{s+4}{s+10.65}$$

$$K = \frac{d_1 d_2 d_3}{l_1} = \frac{8.88 \times 8.17 \times 10.35}{7.93} = 94.73$$

محاسبه k_v:

$$G(s)C(s) = 94.73 \times \frac{s+4}{s+10.65} \times \frac{1}{s(s+2)}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)C(s) = \frac{94.73 \times 4}{10.65 \times 2} = 17.8$$

k_v مطلوب : $e_{ss} = 0.05 \rightarrow k_v \geq 20$ → طراحی نمی‌تواند k_v مطلوب را بدهد، پس باید محل صفر و قطب‌های کنترل کننده را عوض کنیم.

Subject:
Date

۴ اگر شرایط مطلوب تامین نشد، محل قطب های مسلط را کمی تغییر داده و مراحل طراحی را تکرار می کنیم:

با انتخاب $\xi = 0.45$ ، $\xi\omega_n = 4.5$ طراحی را تکرار می کنیم:

$$(\theta - \phi) - \varphi_1 - \phi_2 = (2l+1)\pi \quad , \quad \theta = 90 \rightarrow \varphi = 47.6^\circ$$

$$\rightarrow d = 8.13 \rightarrow p = 12.63 \, , \, z = 4.5$$

$$K = \frac{d_1 d_2 d_3}{l_1} = 125.36 \longrightarrow k_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)\,C(s) = 22.33 > 20 \checkmark$$

← شبیه سازی: $PO = 32\%$ ✗ ← ① استفاده از پیش فیلتر

$T_s = 0.83\,s$ ✓ ② اصلاح s_1 و s_2

هدف آن است که اثر صفر را (که باعث افزایش PO است) کاهش دهیم. این اثر تابع فاصله صفر از مبدأ است، پس باید آن را دور کنیم.

$$\rightsquigarrow s_1, s_2 = -6 \pm j6 \rightarrow z = 6 \, , \, p = 36$$

$$\Rightarrow K = 312 \rightarrow k_v = 26 > 20 \checkmark$$

شبیه سازی ها: $PO\% = 19\%$, $T_s \simeq 0.63$ ✓

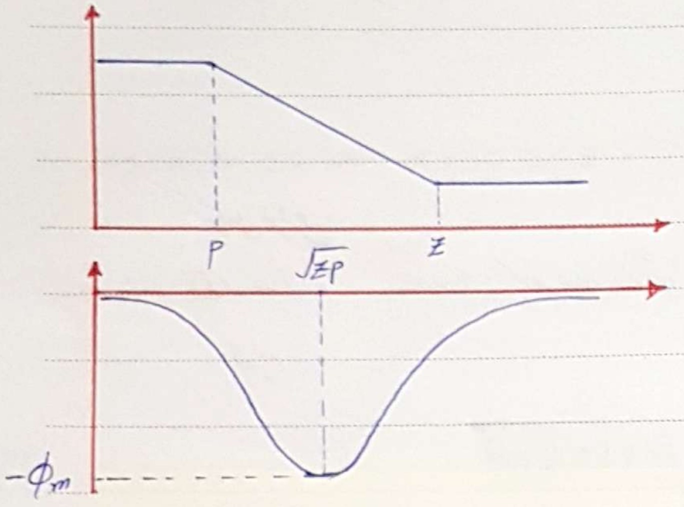
* استفاده از پیش فیلتر احتمالاً T_s را زیاد می کند، چون خود این فیلتر دینامیک مشخص دارد و نمی تواند زمان نشست سیستم دیگر را کمتر کند!

همچنین دور کردن s_1 و s_2 باعث می شود که قطب کنترل کننده بیشتر دور شود، و این باعث می شود که s_1 و s_2 بیشتر بتوانند در نقش قطب های مسلط عمل کنند.

چون overshoot زیاد بوده، ترجیح می دهیم که ξ را زیاد کنیم، بنابراین برای تغییر محل قطب های s_1 و s_2، به شکل حرکت کردیم که علاوه بر دور شدن از مبدأ، ξ هم زیاد شود.

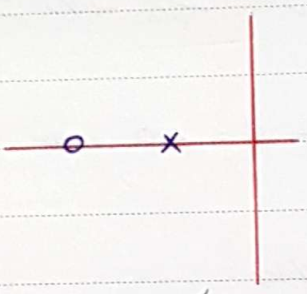
PAPCO

طراحی کنترل‌کننده پس‌فاز (lag):



$$C(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \qquad \alpha > 1 \ , \ T > 0$$

$$z = \frac{1}{T} \quad , \quad p = \frac{1}{\alpha T}$$



* کنترلر lag نیز مانند lead، قصد افزایش PM را دارد، ولی نه با افزایش فاز، بلکه با کاهش cross-over frequency. بنابراین در کنترل‌کننده lag، نمودار اندازه مطلوب، و نمودار فاز مزاحم است.

- معمولاً سعی می‌شود این کنترل‌کننده را طوری طراحی کنند که cross-over frequency به اندازه کافی از محل پیک فاز $\omega = \sqrt{zp}$ دور باشد، تا اثرات ناخواسته آن مشکل‌ساز نشود.

- علت آن که به جای کنترلر lag، از یک بهره با اندازه کمتر از 1 استفاده نمی‌کنیم آن است که کاهش بهره، بر روی خطای ماندگار اثر می‌گذارد، ولی کنترلر lag در $\omega = 0$ بهره صفر دارد و در ادامه اندازه را کاهش می‌دهد و این مشکل ایجاد نمی‌شود.

* lead و lag هر دو می‌توانند برای جبران‌سازی استفاده شوند اما lag بیشتر می‌تواند محبوبیت داشته باشد، چرا که lead در برخی سیستم‌ها می‌تواند منجر به ناپایداری شود.

همچنین با توجه به کاربرد، می‌توان بین این دو انتخاب کرد: lag پهنای باند را کم می‌کند، اما سرعت سیستم را هم کاهش می‌دهد، و lead برعکس.

Subject:
Date

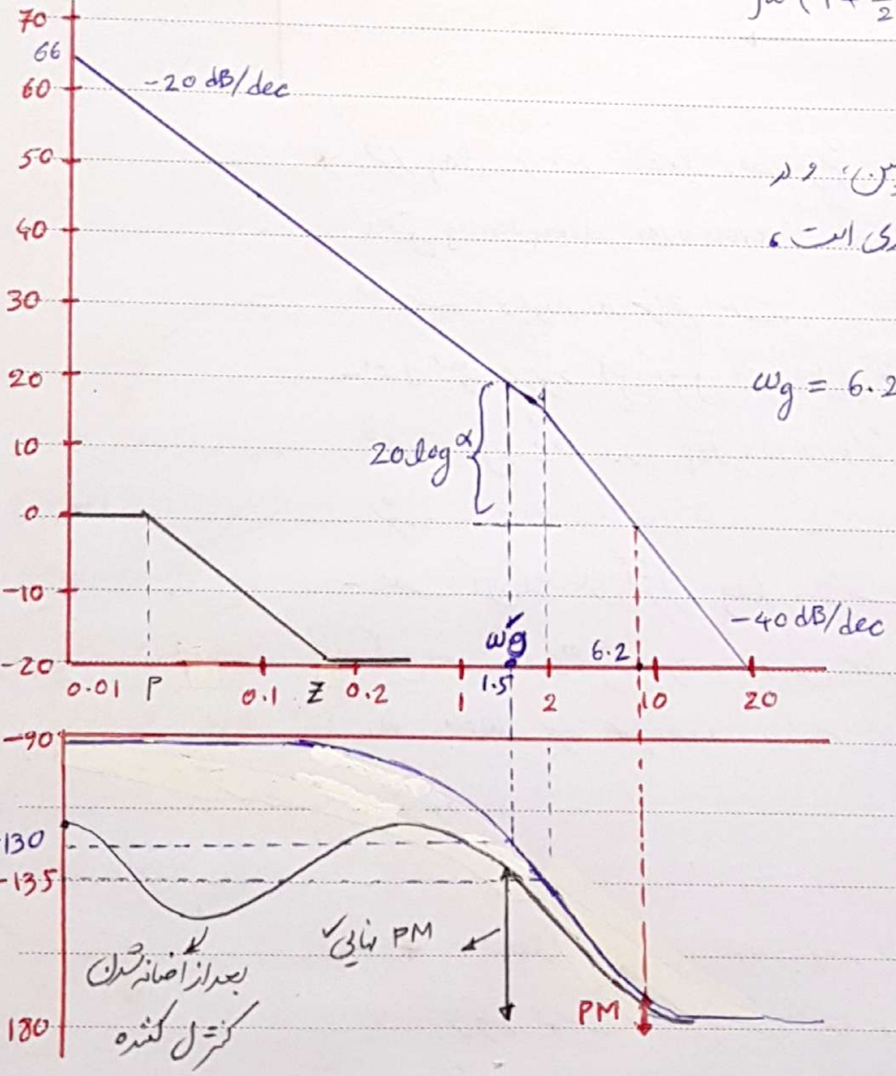
مثال: طراحی lag ؛ $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ $\qquad PO \le 20\%$, $e_{ss} \le 0.05$

$e_{ss} \le 5\% \Rightarrow k_v \ge 20 \rightarrow k_v = 20$

مراحل طراحی:

① دیاگرام Bode سیستم جبران نشده را با تنظیم بهره جهت برقراری ضریب خطای مورد نظر، رسم می‌کنیم:

$k_v = 20 \Rightarrow K = 40 \Rightarrow KG(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1+\frac{1}{2}j\omega)}$



② PM سیستم جبران نشده را تعیین، و در صورتی که احتیاج به جبران سازی است، مراحل زیر را انجام دهید.

$\omega_g = 6.2 \ rad/s \rightarrow PM \simeq 18^\circ < 45^\circ$

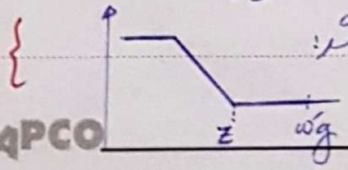
③ فرکانسی را تعیین کنید که اگر فرکانس عبور بهره بود، φ_m مطلوب دست می‌یافتیم. برای در نظر گرفتن اثر منفی فاز جبران کننده، حدود 5° به φ_m اضافه می‌کنیم:

$-180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$

④ صفر جبران کننده را یک decade پایین‌تر از ω'_g انتخاب می‌کنیم.

$z = 0.1\,\omega'_g = 0.15 \ rad/s$

علت: می‌خواهیم ω'_g در مکانی باشد که نمودار اندازه تقریباً ثابت شده باشد:



PAPCO

Subject:
Date

⑤ میزان تضعیفی را که لازم است تا ω_c فرکانس شکست اندازه باشد، از دیاگرام Bode تعیین، و برابر $20 \log \alpha$ قرار می‌دهیم.

$$20 \log \alpha \simeq 20 \Rightarrow \alpha = 10 \;,\; z = \frac{1}{T} = 0.15 \rightarrow p = \frac{1}{\alpha T} = 0.015$$

$$\Rightarrow C(s) = K \frac{1 + \frac{100}{15} s}{1 + \frac{1000}{15} s} = K \frac{1 + 6.67 s}{1 + 66.67 s}$$

شبیه سازی → $PO \simeq 25\% > 20\%$:(

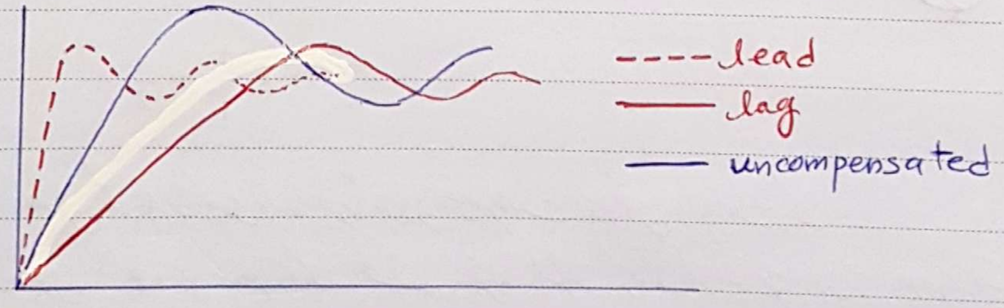
مشاهده شد که نتایج شبیه سازی، مقدار PO بیشتر از حد مطلوب را می‌دهد، این در حالی است که PM به درستی تامین شده است.

علت این مسئله، درست شبیه اتفاقی است که در طراحی lead افتاد، چرا که رابطه‌ای که ما PO را به PM مرتبط می‌کرد، برای سیستم مرتبه ۲ معتبر بود و با اضافه شدن کنترل کننده دیگر این فرض معتبر نیست.

در طراحی lead، با استفاده از یک پیش فیلتر مشکل را حل می‌کردیم، اما این جا این روش چندان کارآمد نیست؛ چرا که صفر کنترل کننده این جا بعد از قطب قرار گرفته و در عمل، این صفر به اندازه‌ی قبل (lead) موثر نیست.

کاری که این جا می‌شود انجام داد آن است که کمی بیشتر پهنای باند را کاهش دهیم و PM را زیاد کنیم.

با کاهش بیشتر پهنای باند، پاسخ از نظر PO بهتر می‌شود، ولی در عوض پاسخ کند می‌شود.



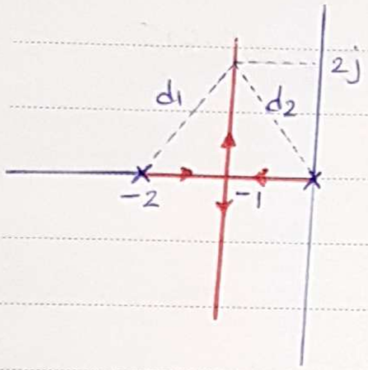
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

طراحی lag به روش مکان هندسی:

$G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$, $k_v \geq 20$, $\xi = 0.45$



① مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده را رسم کنید.

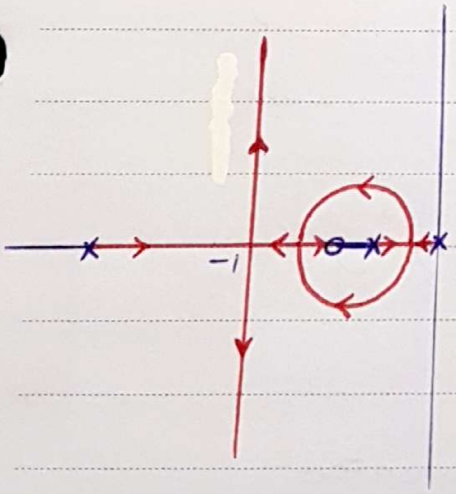
② محل ریشه‌های مسلط سیستم ←

③ در صورتی که ریشه‌های مورد نظر روی مکان هندسی سیستم جبران نشده باشد، بهره سیستم جبران نشده را در محل قطب ها حساب کرده و k_v سیستم جبران نشده را به دست می‌آوریم

$K = d_1 d_2 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

k_v جبران نشده $= \lim_{s\to 0} \frac{5s}{s(s+2)} = 2.5$

④ نسبت k_v مطلوب به k_v جبران نشده را به دست آورید. این نسبت باید برابر نسبت صفر به قطب جبران کننده باشد. زیرا:



$C(s)G(s) = K \frac{s+z}{s+p} \times \frac{1}{s(s+2)}$

k_v جبران شده $= \lim_{s\to 0} s\,C(s)G(s)$

$= K \times \frac{z}{p} \times \frac{1}{2}$

* این که محل شاخه‌های وسط تقریباً بدون تغییر است، به این دلیل است که چون z و p به هم نزدیک هستند، تقریباً شرط زاویه در مناطق دورتر بدون تغییر می‌ماند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

در این مثال می‌خواهیم k را به اندازه $\frac{20}{2.5}=8$ افزایش دهیم. کافی است $\frac{Z}{P}=8$ ،

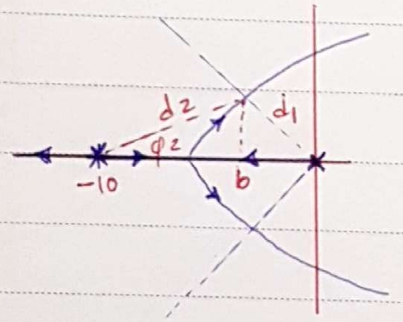
$\Rightarrow \alpha = 8$

مثلاً : $Z=0.1 \rightarrow P=\frac{0.1}{8} \rightarrow C(s)=5\times\frac{s+0.1}{s+\frac{0.1}{8}}$

حد بالای $\frac{Z}{P}$ بایستی کوچکتر از 100 باشد.

⑤ باید زاویه خط واصل به صفر جبران کننده و خط واصل به قطب جبران کننده از 2 درجه کمتر باشد. اگر نبود، با انتخاب مقدار کوچکتری برای Z مرحله ۴، طراحی را تکرار می‌کنیم. (در این مسئله، $\theta \simeq 2^\circ$ است)

مثال : $G(s)=\frac{1}{s(s+10)^2}$ ، مطلوبات : $\begin{cases} e_{ss} \le 5\% \\ PO \le 5\% \end{cases}$



$e_{ss} \le 5\% \Rightarrow K_v = \lim s\frac{K}{s(s+10)^2} = \frac{K}{100}$

$K_v \ge 20 \Rightarrow K \ge 2000$

s^3	1	100
s^2	20	K
s^1	$\frac{2000-K}{20}$	0
s^0	K	

شرط پایداری سیستم جبران نشده : $0 \le K \le 2000$

$\frac{dG}{ds}=0 \rightarrow 3s^2+40s+100=0 \Rightarrow \begin{cases} s=-10 \\ s=-3.33 \end{cases}$

* با توجه به مقدار K مورد نیاز، طراحی lag مناسب‌تر خواهد بود. (یک رویکرد برای انتخاب بین lead و lag، آن است که اگر نقاط مورد نظر روی مکان هندسی هستند و صرفاً می‌خواهیم به ازای مقدار دیگری از K روی آن‌ها قرار بگیریم، از lag استفاده می‌کنیم؛ اما اگر می‌خواهیم مسیر عبور مکان هندسی را عوض کنیم، از lead استفاده می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

برای بدست آوردن مختصات قطب مسلط:

$$\frac{b}{10-b} = \tan\phi_2$$

شرط زاویه → $\phi_2 = 22.5^\circ$ ⇒ $b = 2.9$

$$d_1 = b\sqrt{2} = 2.9\sqrt{2}$$

$$d_2 = \sqrt{2.9^2 + (10-2.9)^2}$$

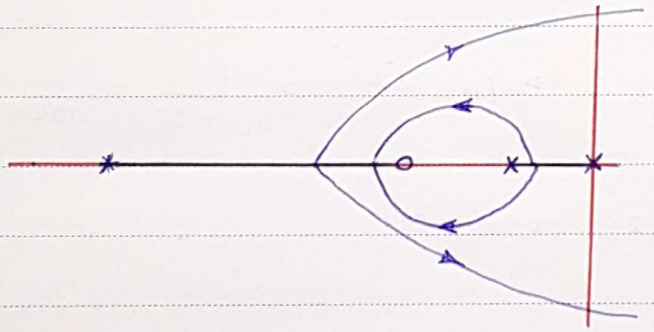
⇒ $K = d_1 d_2^2 = 241.23$

سیستم جبران نشده $k_v = \lim_{s\to 0} s \dfrac{241.23}{s(s+10)^2} = 2.41$

سیستم جبران شده $k_v' = 20$

$$\alpha = \frac{k_v'}{k_v} = 8.3$$

اگر $z = 0.1$ → $p = \dfrac{0.1}{8.3}$ → $C(s) = 241.23 \dfrac{s+0.1}{s+\frac{0.1}{8.3}}$



* در حالت حدی، اگر قطب جبران کننده lag روی $s=0$ باشد، جبران کننده PI داریم:

$$C(s) = K\frac{s+z}{s} \quad (PI)$$

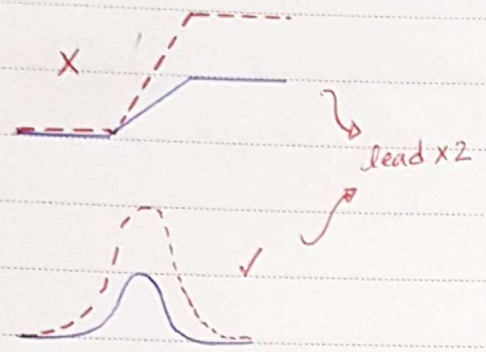
* در حالت کلی، lag مشکل بهره زیاد برای رسیدن به e_{ss} کم را حل می‌کرد. اگر در حالت حدی به دنبال $e_{ss}=0$ باشیم، احتمالاً انتخاب PI گزینه مناسبی خواهد بود.

PAPCO

Scanned by CamScanner

جبران کننده ۲ طبقه‌ای

■ lead φ_m را افزایش می‌دهد و پهنای باند را هم بالا می‌برد. با ۲ طبقه lead می‌توان $2\varphi_m$ اضافه کرد، ولی پهنای باند بسیار بیشتر می‌شود.



← در این شرایط ترجیحاً از lead-lag استفاده می‌کنیم که از خواص مطلوب هر دو طراحی بهره ببریم.

مثال

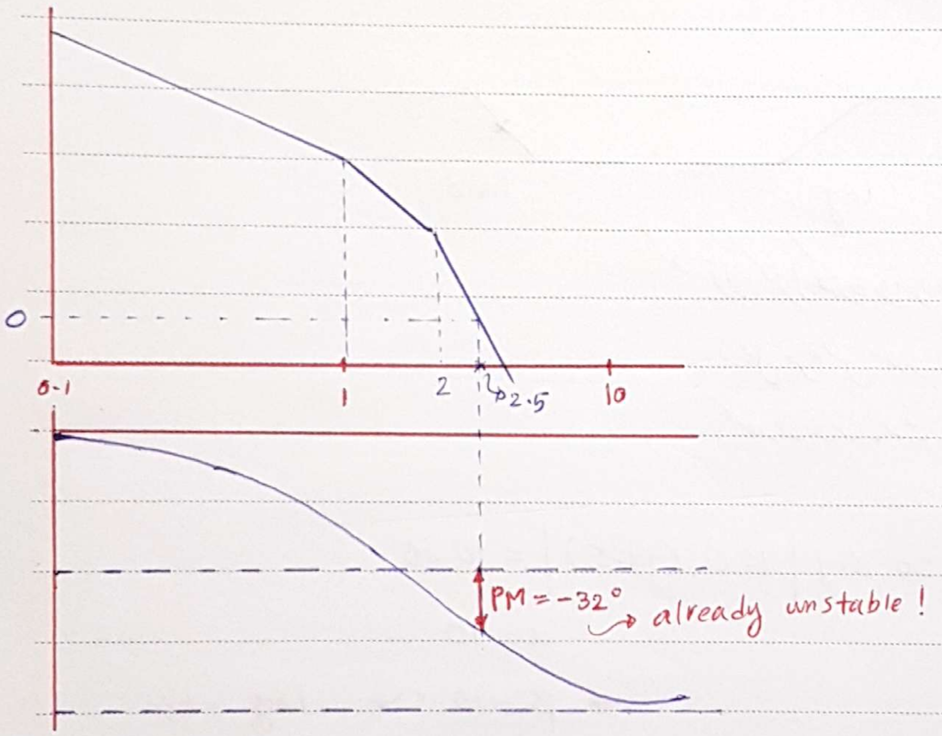
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$K_v \geq 10$

$PM \geq 50$

$GM \geq 10\ dB$

* پهنای باند سیستم ω_B از 3dB بیشتر نشود.



$K_v \geq 10 \rightarrow \frac{K}{2} \geq 10 \rightarrow K \geq 20$ ← فرض: $K = 20$

Scanned by CamScanner

- نیاز به $\varphi_m = 50+32+\theta$ داریم که با یک جبران کننده lead امکان پذیر نیست. ← برای جلوگیری از افزایش

هرچه بیشتر نیاز باشد، از lead-lag استفاده می کنیم.

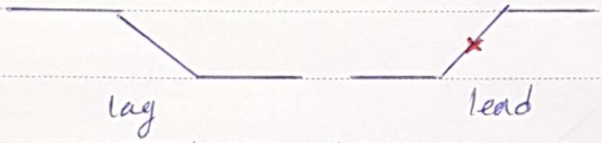
- فرکانس $\omega_g' = 1.5$ را انتخاب می کنیم و توسط جبران کننده lead، زاویه را در این فرکانس افزایش

می دهیم. کافی است بگیریم، $\varphi_m = 50+\underset{5}{\theta} = 55^\circ$

$$\sin \underset{55^\circ}{\varphi_m} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Rightarrow \alpha \simeq 10$$

$$\omega_m = \omega_g' = 1.5 = \frac{1}{T_1\sqrt{\alpha}} \rightarrow T_1 \simeq 0.2$$

منتسب به lead



توالی کنترل کننده ها را به این شکل می گیریم، چون lead دقیقاً

در محل فرکانس عبور اثر می گذارد، ولی lag پس از

عبور از نوسانات فاز، اثر خود را می گذارد.

$$-20\log\beta + 10\log\alpha = 20\log|KG(j1.5)| \simeq 10\,dB$$

$$\alpha = 10$$

$$\rightarrow \beta = 10$$ ← مربوط به lag

صفر جبران کننده lag را یک دهه پایین تر از ω_g' انتخاب می کنیم:

$$\frac{1}{T_2} = 0.1\times1.5 = 0.15 \Rightarrow C(s) = \underbrace{20}_{gain}\ \underbrace{\frac{1+2s}{1+0.2s}}_{lead} \times \underbrace{\frac{1+6.7s}{1+67.7s}}_{lag}$$